

Zeitverzögerte Rückkopplungskontrolle torsionsfreier periodischer Orbits

Controlling Torsion-Free Periodic Orbits by Time-Delayed Feedback Control

Zur Erlangung des Grades eines Doktors der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.)

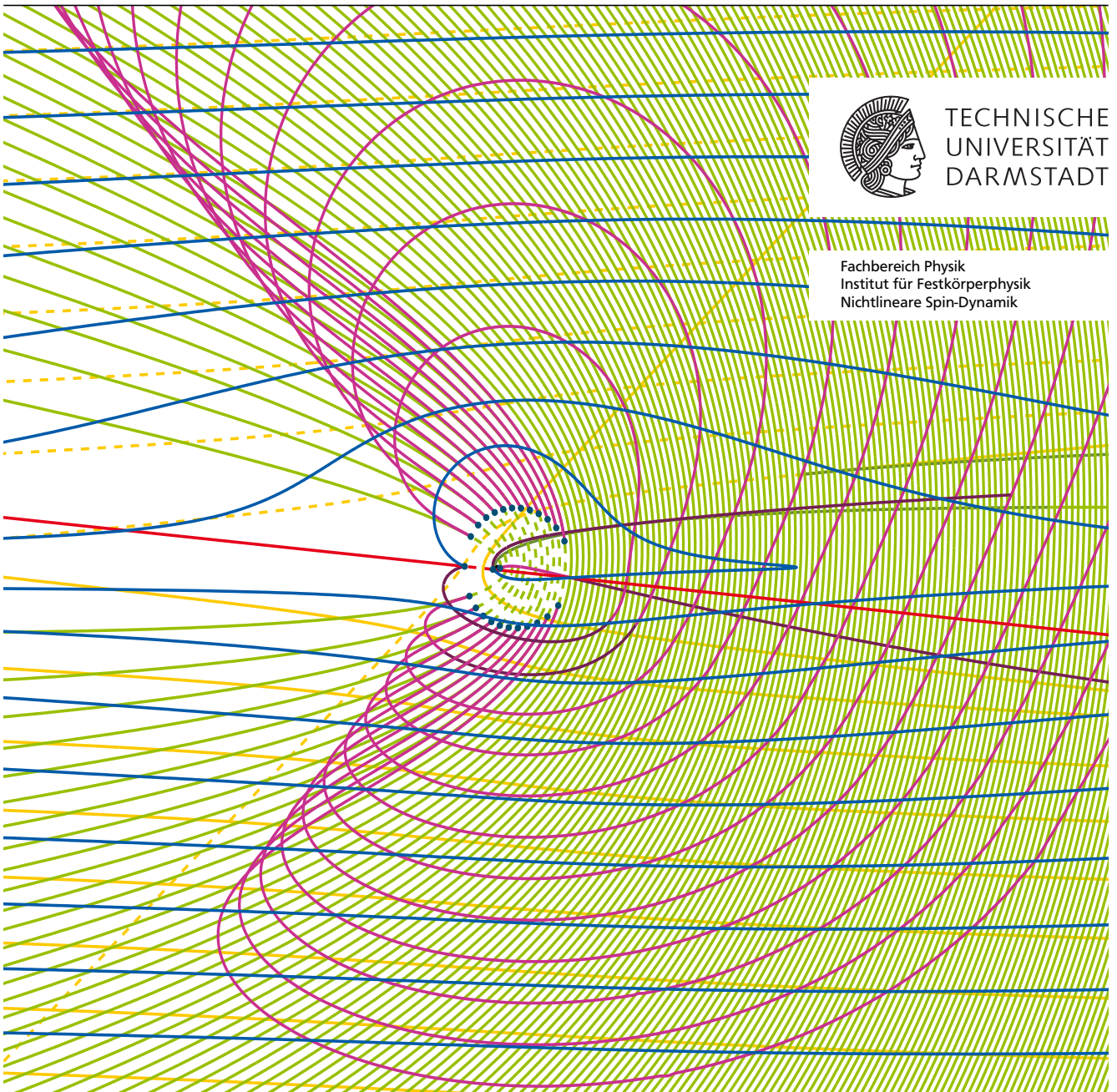
genehmigte Dissertation von Dipl.-Phys. Clemens von Loewenich aus Frankfurt am Main

März 2010 — Darmstadt — D 17



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Fachbereich Physik
Institut für Festkörperphysik
Nichtlineare Spin-Dynamik



Zeitverzögerte Rückkopplungskontrolle torsionsfreier periodischer Orbits
Controlling Torsion-Free Periodic Orbits by Time-Delayed Feedback Control

Genehmigte Dissertation von Dipl.-Phys. Clemens von Loewenich aus Frankfurt am Main

1. Gutachten: Prof. Dr. Hartmut Benner
2. Gutachten: Dr. habil. Wolfram Just
3. Gutachten: Prof. Dr. Barbara Drossel

Tag der Einreichung: 18. Januar 2010

Tag der Prüfung: 15. Februar 2010

Darmstadt — D 17

Bitte zitieren Sie dieses Dokument als:

URN: urn:nbn:de:tuda-tuprints-20831

URL: <http://tuprints.ulb.tu-darmstadt.de/2083>

Dieses Dokument wird bereitgestellt von tuprints,

E-Publishing-Service der TU Darmstadt

<http://tuprints.ulb.tu-darmstadt.de>

tuprints@ulb.tu-darmstadt.de



Die Veröffentlichung steht unter folgender Creative Commons Lizenz:

Namensnennung – Keine kommerzielle Nutzung – Keine Bearbeitung 2.0 Deutschland

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/2.0/de/>

Zusammenfassung

Chaoskontrolle ist seit nunmehr zwanzig Jahren ein aktives Feld der Forschung. Die zeitverzögerte Rückkopplungskontrolle ist dabei ein einfaches, aber effizientes Werkzeug, um instabile periodische Orbits zu stabilisieren. Lange Zeit wurde angenommen, dass mit dieser Methode keine torsionsfreien periodischen Orbits stabilisiert werden können (*odd number limitation*). Erst 2007 wurde von Fiedler *et al.* am Beispiel der Hopf-Normalform gezeigt, dass diese Einschränkung für autonome Systeme nicht zu halten ist.

In der vorliegenden Arbeit wird gezeigt, dass die zunächst theoretische Idee der Kontrolle torsionsfreier zeitperiodischer Zustände auch in realen Experimenten anwendbar ist. In Experimenten an elektrischen Schwingkreisen konnte erstmals nachgewiesen werden, dass mit der zeitverzögerten Rückkopplungskontrolle torsionsfreie periodische Orbits autonomer Systeme erfolgreich stabilisiert werden können. Zur Vorbereitung der Experimente wurden anhand numerischer Simulationen verschiedene Systeme und Formen der Rückkopplung untersucht. Es hat sich dabei herausgestellt, dass der Erfolg der Kontrolle auch mit anderen Formen der Rückkopplung möglich ist.

Sowohl die experimentellen Ergebnisse als auch die der numerischen Simulationen haben eine drastische Diskrepanz zur bisher bekannten Theorie gezeigt. Mithilfe umfangreicher Bifurkationsanalysen ist es in dieser Arbeit gelungen, experimentelle und numerische Ergebnisse nicht nur qualitativ, sondern auch quantitativ zu erklären.

Abstract

Chaos control is an active field of research for more than twenty years. Time-delayed feedback control is a simple but efficient tool to control unstable periodic orbits. For a long time it has been assumed that torsion-free periodic orbits cannot be stabilised by this method (*odd number limitation*). As recent as 2007 Fiedler *et al.* have shown that this constraint is not valid for autonomous systems.

In this thesis it is shown that the theoretical concept of controlling torsion-free time-periodic states can be applied to real experimental situations. In experiments on electronic oscillators it has been proven for the first time that torsion-free periodic orbits of autonomous systems can be successfully stabilised using time-delayed feedback control. Before performing the experiments various systems and types of feedback have been investigated by numerical simulations. It turned out that control could be achieved by other types of feedback, too.

Both experimental results and numerical simulations were found to be in striking discrepancy with existing theory. Making use of comprehensive bifurcation analysis it has been accomplished to explain the experimental and the numerical results not only qualitatively but even quantitatively.

Stichwörter: Control of chaos, time-delay dynamics, electronic circuit experiment, bifurcation analysis



Inhaltsverzeichnis

I	Propädeutik	1
1	Zeitverzögerte Rückkopplungskontrolle	3
1.1	Lineare Stabilitätsanalyse	4
1.2	Analytische Näherung	7
2	Kontrolle torsionsfreier Orbits	11
2.1	Grundlegende Idee	11
2.2	Analytische Behandlung	12
2.2.1	Bifurkations-Analyse	14
	Begrenzungen des Kontrollgebiets	15
	Ursprung der kontrollinduzierten Orbits	17
2.2.2	Das Zusammenspiel der Bifurkationen	17
II	Synkretismus	19
3	Numerik	21
3.1	Numerische Analyse	21
3.2	Umsetzung der numerischen Analyse	25
3.3	Simulation des van-der-Pol-Oszillators	26
3.3.1	Zweidimensionale Kopplung an eine Komponente	27
3.3.2	Drehmatrix-Kopplung	29
3.4	Stuart-Landau-Oszillator mit Drehmatrix-Kopplung	29
3.5	Zusammenfassung der numerischen Ergebnisse	32
4	Experiment	33
4.1	Experimenteller Aufbau	33
4.1.1	Stuart-Landau-Oszillator ohne Kontrolle	33
4.1.2	Zeitverzögerung und Ankopplung	36
4.1.3	Steuerung	36
4.2	Kontrollexperimente am Stuart-Landau-Oszillator	37
5	Theorie	45
5.1	Begrenzungen des Kontrollgebiets	45
5.2	Ursprung der kontrollinduzierten Orbits	49
5.3	Das Zusammenspiel der Bifurkationen	52
5.4	Vergleich der Theorie mit Experiment und Numerik	56
6	Resümee	59

III Anhang	61
A Experiment	63
A.1 van-der-Pol	63
A.2 Schaltpläne	64
B Theorie	69
B.1 Die transkritische Bifurkation als Kollision zweier Sattel-Knoten-Bifurkationen	69
B.2 Allgemeine Behandlung der transkritischen Bifurkationslinie	72
B.3 Hopf-Bifurkation der kontrollinduzierten Orbits	74
Literaturverzeichnis	75
Lebenslauf	77

Teil I.

Propädeutik

Das Interesse an Steuer- und Regelungstechnik ist im Bereich der Ingenieurwissenschaften und der angewandten Mathematik seit Langem ausgeprägt. Dementsprechend hält das aktive Feld der Kontrolltheorie für jedes erdenkliche Problem einen Lösungsansatz bereit, solange es sich um lineare Systeme handelt. Grundsätzlich wird dabei zwischen invasiven und nichtinvasiven Methoden unterschieden. Für eine technische Anwendung ist es nicht entscheidend, welcher Klasse die Methode angehört. Bei invasiven Kontrollmethoden existiert immer eine nicht-verschwindende Kontrollkraft, wenn der Zielzustand erreicht ist. Bei einer nichtinvasiven Methode wirken nur minimale Kontrollkräfte auf das System. Nicht-invasive Methoden eignen sich besonders für systemeigene instabile Zustände. Dabei kann es sich sowohl um zeitunabhängige Zustände wie Fixpunkte handeln als auch um instabile Bewegungen, wie zum Beispiel instabile periodische Orbits. In den 1990er Jahren wurden solche Ideen der Steuer- und Regelungstechnik mit den Eigenschaften chaotischer Dynamik verbunden. Das Gebiet der Chaoskontrolle war geboren.

Die Idee der Chaoskontrolle ist, einen der instabilen Orbits, die das Skelett des chaotischen Attraktors bilden, zu stabilisieren. Dabei ist es von besonderem Interesse, dass die Kontrolle nichtinvasiv ist und die Kontrollkraft bei Erreichen des Zielzustands verschwindet. Es gibt im Wesentlichen zwei Methoden. Die eine wurde von Ott, Grebogi und Yorke vorgeschlagen („OGY-Kontrolle“) [Ott u. a., 1990]. Für diese Kontrollmethode muss die zugrunde liegende Bewegungsgleichung bekannt sein oder zumindest die Dynamik in der Umgebung des zu kontrollierenden Orbits aus gemessenen Zeitreihen rekonstruiert werden. Besitzt der zu kontrollierende Orbit eine stabile Mannigfaltigkeit, so ist es durch Veränderung von Systemparametern möglich, die Trajektorie auf die stabile Mannigfaltigkeit zu bringen. Da sich dann die Systemdynamik nur noch in einem attraktiven Unterraum abspielt, läuft das System auf den Zielorbit zu. Ohne störende Einflüsse bleibt das System für immer auf diesem Orbit. Diese Methode erfreut sich besonders unter Theoretikern großer Beliebtheit. Aus experimenteller Sicht stellen die Kenntnis der Bewegungen und der hohe Rechenaufwand für die Kontrolleingriffe in realen Systemen eine große Einschränkung dar. Eine weitere Einschränkung ist, dass die Veränderung der Systemparameter innerhalb eines Bruchteils der Umlauffrequenz des Orbits erfolgen muss. Damit ist diese Methode auf relativ langsame Systeme beschränkt.

Eine alternative Methode wurde von Pyragas vorgeschlagen [Pyragas, 1992]. Sie basiert auf einer zeitverzögerten Rückkopplung und wird dementsprechend *delayed feedback control* genannt. Für diese Kontrollmethode gelten die Einschränkungen der OGY-Kontrolle nicht mehr. Mit ihr ist es möglich, schnelle Systeme ohne genaue Kenntnis der Differenzialgleichungen zu kontrollieren. Diese Kontrollmethode bzw. eine ihrer Ableitungen ist Gegenstand dieser Arbeit und der folgenden Ausführungen.



1 Zeitverzögerte Rückkopplungskontrolle

Die von Pyragas vorgeschlagene Methode der Chaotikontrolle kommt ohne die Einschränkungen aus, dass das zu kontrollierende System relativ langsam und die das System beschreibende Differenzialgleichung bekannt sein muss [Pyragas, 1992]. Bei der Entwicklung dieser Methode hat der in der Regelungstechnik gut bekannte Proportionalregler Pate gestanden. Bei einem Proportionalregler wirkt eine Kontrollkraft $F(t)$ auf das System, die proportional zum Abstand zwischen aktuellem Systemzustand $\mathbf{x}(t)$ und Zielorbit $\xi(t)$ ist.

$$\mathbf{F}_{prop}(t) = K(\mathbf{x}(t) - \xi(t)) \quad (1.1)$$

Dabei muss der Zielorbit zu jeder Zeit bekannt sein. An diesem Punkt setzt die zeitverzögerte Rückkopplungskontrolle (*delayed feedback control*) an. Um einen instabilen periodischen Zustand $\xi(t) = \xi(t + T)$ mit der Periodendauer T zu stabilisieren, schlug Pyragas vor, statt des Zielorbits einen Systemzustand aus der Vergangenheit als Referenz zu wählen. Dadurch ändern sich im Allgemeinen die Kontrolleigenschaften gegenüber denen des Proportionalreglers. In einem chaotischen System kommt es immer vor, dass die Trajektorie irgendwann beliebig nahe am Zielorbit vorbeiführt. Für die Kontrollkraft ergibt sich dann der Zusammenhang:

$$\mathbf{F}(t) = K(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(t - \tau)) \quad (1.2)$$

Um zu garantieren, dass es sich um eine nichtinvasive Kontrollmethode handelt, muss die Verzögerungszeit τ ein ganzzahliges Vielfaches der Periodendauer T sein. Idealerweise sind beide Zeiten gleich ($\tau = T$). Der entscheidende Vorteil dieser Methode ist an dieser Stelle schon offensichtlich. Es ist keine explizite Kenntnis der Differenzialgleichung oder des Zielorbits notwendig. Nur die Periodendauer muss ungefähr bekannt sein. Liegt die Verzögerungszeit in der Nähe der Periodendauer, ist die Stabilisierung des Zielorbits in gewissen Grenzen zwar möglich, die Kontrollkraft verschwindet jedoch nicht. Durch Anpassung der Verzögerungszeit ist es dann möglich, die Kontrollkraft zu minimieren, bis sie bei Übereinstimmung beider Zeiten verschwindet.

In Experimenten und numerischen Simulationen wurde die inzwischen auch als „Pyragas-Kontrolle“ bezeichnete Methode erfolgreich angewendet. Es stellte sich sehr bald heraus, dass es periodische Orbits gibt, die sich kontrollieren lassen, aber auch solche, bei denen es nicht geht. Es herrschte lange Unklarheit darüber, welche Mechanismen dafür verantwortlich sind. Erst 1997 konnte Just eine Erklärung liefern [Just u. a., 1997]. Seither sind viele theoretische und experimentelle Arbeiten veröffentlicht worden, die das Verständnis ausgebaut haben. Einen guten Überblick über den aktuellen Stand der Forschung liefert das „*Handbook of Chaos Control*“ [Schöll u. Schuster, 2007].

Inzwischen gibt es eine Reihe von Abwandlungen und Erweiterungen der zeitverzögerten Rückkopplungskontrolle. Die bekannteste ist die erweiterte zeitverzögerte Rückkopplungskontrolle (*extended time delay autosynchronisation*) [Socolar u. a., 1994]. Die Kontrolle wird dabei um eine Art Gedächtnis erweitert:

$$\mathbf{F}_{ext}(t) = K(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(t - \tau)) + R\mathbf{F}_{ext}(t - \tau) \quad (1.3)$$

Neben der Kontrollamplitude K wird der Parameter R eingeführt, der die Gewichtung der Vergangenheit festlegt. R beschrieb ursprünglich die Reflektivität eines Fabry-Perot-Interferometers und wird daher auch als Reflexionsparameter bezeichnet. Aus Stabilitätsgründen ist der Reflexionsparameter auf den Wertebereich $|R| < 1$ beschränkt. Für den Spezialfall $R = 0$ ergibt sich das einfache Kontrollschema, das von Pyragas vorgeschlagen wurde. Die Vorzüge dieser neuen Methode liegen unter anderem in ihrer einfachen Implementierung insbesondere in optischen Systemen. Ein weiterer wesentlicher Vorteil dieser

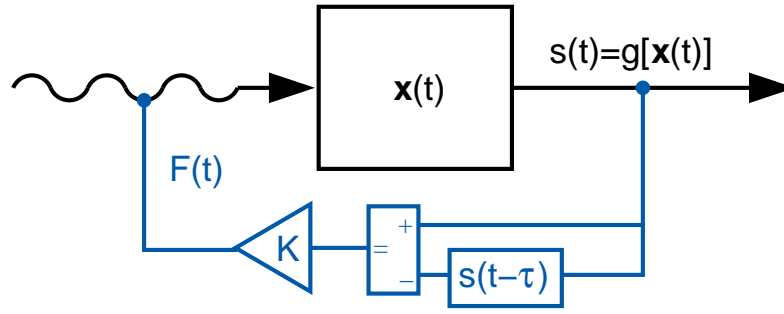


Abbildung 1.1.: Schematische Darstellung der zeitverzögerten Rückkopplungskontrolle. Das Messsignal $s(t)$ ist ein Funktional der inneren Freiheitsgrade $\mathbf{x}(t)$. Die Kontrollkraft $F(t)$ wird auf irgendeine Weise an das System gekoppelt.

Variante liegt darin, dass deutlich instabilere Orbits kontrolliert werden können, als es mit der einfachen Kontrollmethode möglich ist. Im Folgenden wird nicht weiter auf diese Methode eingegangen, da sie in dieser Arbeit nicht verwendet wurde.

1.1 Lineare Stabilitätsanalyse

Um die Mechanismen zu verstehen, die zur Kontrolle der im Chaos eingebetteten instabilen periodischen Orbits führen, wird die lineare Stabilitätsanalyse herangezogen. Sie liefert nicht nur Erkenntnisse darüber, welche Bifurkationen den Stabilitätsbereich einschließen, sondern auch, welchen Einschränkungen die Kontrollmethode unterliegt.

Die zeitverzögerte Rückkopplungskontrolle zielt auf die Kontrolle zeitperiodischer Zustände ab, bei denen keine Informationen über das zugrunde liegende dynamische System zugänglich sind außer einem Messsignal. Dieses Messsignal ist ein Funktional der inneren Freiheitsgrade des Systems $\mathbf{x}(t)$ und im Allgemeinen eine skalare Größe $s(t) = g[\mathbf{x}(t)]$ (s. Abb. 1.1). Dabei spielt der Zusammenhang des Messsignals und der inneren Freiheitsgrade keine entscheidende Rolle bei der analytischen Behandlung, die ihrerseits auch von keinem speziellen Modell ausgeht. Die auf das System wirkende Kontrollkraft wird aus der Differenz des aktuellen und des zeitverzögerten Messsignals gewonnen:

$$F(t) = K \left(g[\mathbf{x}(t)] - g[\mathbf{x}(t - \tau)] \right) \quad (1.4)$$

Die Kontrollkraft ist proportional zur zeitverzögerten Differenz der Messsignale und zur Kontrollamplitude K . Wird die Kontrollkraft auf irgendeine Weise an das System angekoppelt, kann die Systemdynamik durch die Differenzialgleichung

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), F(t)) \quad (1.5)$$

beschrieben werden. Dabei wird vorausgesetzt, dass bei ausgeschalteter Kontrolle ($K = 0$) die Differenzialgleichung das freie System beschreibt. Nach Voraussetzung existiert ein instabiler periodischer Orbit $\xi(t) = \xi(t + T)$, der kontrolliert werden soll. Wird die Verzögerungszeit τ jetzt so gewählt, dass sie ein ganzzahliges Vielfaches der Periodendauer T ist, verschwindet die Kontrollkraft beim Erreichen des Zielorbits. So ist garantiert, dass es sich um eine nichtinvasive Kontrollmethode handelt und $\xi(t)$ eine Lösung der Differenzialgleichung darstellt. Trotz dieser Allgemeinheit des Modells ist es möglich, Aussagen über die Stabilität des Zielorbits zu gewinnen. Dazu ist es notwendig, eine Linearisierung um den periodischen Orbit $\xi(t)$ durchzuführen und kleine Abweichungen der Trajektorie von diesem Orbit zu betrachten. Mit dem Ansatz $\delta \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t) - \xi(t)$ ergibt sich für das unkontrollierte System in linearer Ordnung:

$$\delta \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{D}_1 \mathbf{f}(\xi(t), 0) \cdot \delta \mathbf{x}(t) \quad (1.6)$$

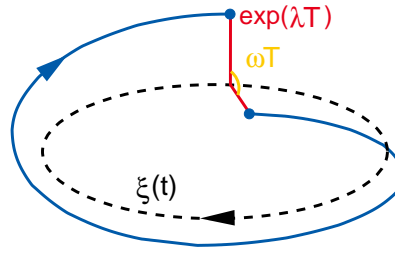


Abbildung 1.2.: Das Bild zeigt eine Trajektorie ohne Kontrolle (blau), wie sie vom instabilen periodischen Orbit $\xi(t) = \xi(t + T)$ wegläuft. Der Abstand des Systems zum Zielorbit ist rot dargestellt, die Torsion gelb.

Dabei stellt $\mathbf{D}_1 \mathbf{f}$ die Jakobi-Matrix zum ersten Argument der Funktion \mathbf{f} dar. Die so gewonnene Differenzialgleichung beschreibt die Dynamik in unmittelbarer Nachbarschaft des periodischen Orbits, was für Aussagen über die Stabilität vollkommen ausreicht. Wäre die Jakobi-Matrix zeitunabhängig, könnte die Differenzialgleichung (1.6) durch einen einfachen Exponentialansatz gelöst werden. Da die Jakobi-Matrix durch die Abhängigkeit von $\xi(t) = \xi(t + T)$ ebenfalls T -periodisch ist, kann ein Floquet-Ansatz gewählt werden. Bei diesem Ansatz wird die Bewegung in einen periodischen und einen Exponentialanteil zerlegt. Die vollständige Lösung bildet dann die Linearkombination:

$$\delta \mathbf{x}(t) = \sum_{v=1}^n c_v e^{(\lambda_v + i\omega_v)t} \mathbf{q}_v(t) \quad (1.7)$$

Die konstanten Vorfaktoren c_v werden durch die Anfangsbedingungen festgelegt. Die Periodizität ist in den Floquet-Rechtseigenmoden¹ $\mathbf{q}_v(t) = \mathbf{q}_v(t + T)$ enthalten. Diese Periodizitätsbedingung in Verbindung mit der sich aus (1.6) und (1.7) ergebenden Gleichung

$$(\lambda_v + i\omega_v) \mathbf{q}_v(t) + \dot{\mathbf{q}}_v(t) = \mathbf{D}_1 \mathbf{f}(\xi(t), 0) \cdot \mathbf{q}_v(t) \quad (1.8)$$

stellen ein kompliziertes Eigenwertproblem für die Floquet-Exponenten $(\lambda_v + i\omega_v)$ dar. Die Anzahl der Floquet-Exponenten hängt dabei von der Dimension n des Systems ab. Die Stabilität des periodischen Orbits $\xi(t)$ wird natürlich vom größten Realteil des Floquet-Exponenten bestimmt. Ist der Realteil, auch Lyapunov-Exponent genannt, positiv, ist der periodische Orbit instabil. Eine Störung wächst dann mit der Zeit exponentiell an. Ist er negativ, ist der Orbit stabil. Die Störung wird gedämpft und verschwindet für große Zeiten. Im Fall eines verschwindenden Lyapunov-Exponenten ist der periodische Orbit marginal stabil. Autonome Systeme besitzen immer einen Floquet-Exponenten $(\lambda_v + i\omega_v) = 0$, der der Goldstone-Mode entspricht.

Der Imaginärteil des Floquet-Exponenten beschreibt die Torsion der Trajektorie. Im Laufe einer Periode bewegt sie sich um den Winkel $\omega_v T$ um den periodischen Orbit herum. Der Imaginärteil des Floquet-Exponenten ist nicht eindeutig festgelegt. Es lässt sich immer ein Term $\exp(i 2\pi/T)$ abtrennen. Zusammen mit der Floquet-Eigenmode bildet der Term $\exp(i 2\pi/T) \mathbf{q}_v(t)$ wieder eine Lösung des Eigenwertproblems (1.7). Es ist daher sinnvoll, den Imaginärteil auf $(\omega_v \bmod 2\pi)$ zu beschränken. Wie bei allen komplexwertigen Bestimmungsgleichungen treten die Floquet-Exponenten, außer für die reellwertigen Sonderfälle $\omega_v T = 0$ oder π , als komplex-konjugierte Eigenwerte auf. In Abbildung 1.2 ist der Floquet-Exponent mit der Torsion der Trajektorie veranschaulicht.

Das eigentliche Interesse liegt bei der Stabilität des kontrollierten Orbits. Dabei wird die Verzögerungszeit auf den Wert $\tau = T$ festgesetzt. Die lineare Stabilitätsanalyse verläuft äquivalent zu der ohne Kontrolleingriff [Just u. a., 1997]. Die Entwicklung um den instabilen periodischen Orbit liefert in diesem Fall:

$$\begin{aligned} \delta \dot{\mathbf{x}}(t) = & \mathbf{D}_1 \mathbf{f}(\xi(t), 0) \cdot \delta \mathbf{x}(t) \\ & + K \cdot \mathbf{d}_2 \mathbf{f}(\xi(t), 0) \otimes \mathbf{D} \mathbf{g}[\xi(t)] \cdot (\delta \mathbf{x}(t) - \delta \mathbf{x}(t - \tau)) \end{aligned} \quad (1.9)$$

¹ Zu jedem vollständigen Floquet-Rechtssystem gehört auch ein entsprechendes Floquet-Linkssystem.

Wie zuvor ist $\mathbf{D}_1 \mathbf{f}$ die Jakobi-Matrix bezüglich des ersten Arguments der Funktion \mathbf{f} . Die skalare Ableitung nach dem zweiten Argument dieser Funktion ist $d_2 \mathbf{f}$. Durch $\mathbf{D}g$ wird der Gradient des Funktionals $g[\xi(t)]$ angegeben. Auch in diesem Fall kann ein Floquet-Ansatz der Form (1.7) gewählt werden. Dabei werden zur Unterscheidung zum unkontrollierten System Großbuchstaben verwendet. Es ergibt sich somit:

$$(\Lambda_\alpha + i\Omega_\alpha) \mathbf{Q}_\alpha(t) + \dot{\mathbf{Q}}_\alpha(t) = \mathbf{D}_1 \mathbf{f}(\xi(t), 0) \cdot \mathbf{Q}_\alpha(t) + K \cdot d_2 \mathbf{f}(\xi(t), 0) \otimes \mathbf{D}g[\xi(t)] \cdot (1 - e^{-(\Lambda_\alpha + i\Omega_\alpha)\tau}) \cdot \mathbf{Q}_\alpha(t) \quad (1.10a)$$

$$= \mathbf{M} [K (1 - e^{-(\Lambda_\alpha + i\Omega_\alpha)\tau}), t] \cdot \mathbf{Q}_\alpha(t) \quad (1.10b)$$

Dabei wurde die Periodizität der Floquet-Eigenfunktion $\mathbf{Q}_\alpha(t) = \mathbf{Q}_\alpha(t + T)$ ausgenutzt, um den Term mit der Zeitverzögerung zu vereinfachen. Im zweiten Schritt wurde die Matrix

$$\mathbf{M}[\kappa, t] := \mathbf{D}_1 \mathbf{f}(\xi(t), 0) + \kappa \cdot d_2 \mathbf{f}(\xi(t), 0) \otimes \mathbf{D}g[\xi(t)] \quad (1.11)$$

als Abkürzung eingeführt. Es fällt auf, dass das Eigenwertproblem (1.10b) durch diese Abkürzung wie ein normales Floquet-Problem der Form (1.8) aussieht. Allerdings hängt die Matrix \mathbf{M} selbst von den zu bestimmenden Floquet-Exponenten $(\Lambda_\alpha + i\Omega_\alpha)$ ab. Gerade diese Form mit dem Term $\{1 - \exp(-(\Lambda_\alpha + i\Omega_\alpha)\tau)\}$ ist typisch für diese Klasse von Differenzen-Differenzialgleichungen.

Wie auch bei der Differenzialgleichung des freien Systems ist die explizite Form der Matrix \mathbf{M} unbekannt. Dennoch lassen sich Aussagen aus dem Eigenwertproblem (1.10) gewinnen. Die Floquet-Exponenten des Eigenwertproblems sind wie die Matrix \mathbf{M} von der Größe κ abhängig. Deshalb ist es sinnvoll, eine Funktion $\Gamma[\kappa]$ einzuführen, die die Abhängigkeit dieser Floquet-Exponenten von der Kontrolle beschreibt:

$$\Gamma[\kappa] \mathbf{Q}_\alpha(t) + \dot{\mathbf{Q}}_\alpha(t) = \mathbf{M}[\kappa, t] \cdot \mathbf{Q}_\alpha(t) \quad (1.12)$$

Es besteht natürlich weiterhin das Problem, dass die explizite Form des Eigenwertproblems nicht bekannt ist und somit auch die Funktion Γ eine Unbekannte ist. Das Problem lässt sich zumindest auf die charakteristische Gleichung

$$\Lambda_\alpha + i\Omega_\alpha = \Gamma [K (1 - e^{-(\Lambda_\alpha + i\Omega_\alpha)\tau})] \quad (1.13)$$

reduzieren. Bekannt ist, dass die Funktion Γ für den unkontrollierten Fall ($K = 0$) die Eigenwerte des unkontrollierten Orbits ergeben muss:

$$\Gamma[0] = \lambda_v + i\omega_v \quad (1.14)$$

Diese Bedingung reicht schon aus, um eine der prominentesten Einschränkungen abzuschätzen, die auch im Rahmen dieser Arbeit von herausragender Bedeutung ist. Der unkontrollierte Orbit besitzt mindestens einen instabilen Lyapunov-Exponenten ($\lambda > 0$). Damit dieser Orbit stabilisiert werden kann, müssen alle Lyapunov-Exponenten negativ sein. Das heißt, dass alle positiven Lyapunov-Exponenten einen Vorzeichenwechsel erfahren müssen. Für bestimmte Kontrollamplituden K gilt dann für jede von ihnen $\Lambda = 0$. Wird zusätzlich angenommen, dass keine Torsion vorliegt ($\Omega = 0$), folgt aus Gleichung (1.13):

$$0 = \Lambda_\alpha + i\Omega_\alpha = \Gamma [K (1 - e^0)] = \Gamma[0] = \lambda_v + i\omega_v \neq 0 \quad (1.15)$$

Es ergibt sich ein Widerspruch, wenn keiner der Lyapunov-Exponenten entartet war, da zuvor angenommen wurde, dass λ positiv ist [Just u. a., 1997]. Für nicht-autonome Systeme lässt sich dieser Widerspruch auch anders formulieren [Nakajima, 1997]: Wenn ein Orbit in einem nicht-autonomen System eine ungerade Anzahl positiver reeller Floquet-Exponenten besitzt, ist er nicht kontrollierbar. In der Literatur ist diese Aussage auch unter dem Schlagwort „*odd-number limitation*“ bekannt. Bei einer geraden Anzahl positiver reeller Floquet-Exponenten können diese durch Kollision ein komplex konjugiertes Paar von Eigenwerten bilden. Dadurch erhält der Orbit die nötige Torsion. Nakajima behauptet in einer Fußnote, dass dies so auch auf autonome Systeme zu übertragen sei. Diese Behauptung lässt sich



Abbildung 1.3.: Es ist ein instabiler torsionsfreier Orbit $\xi(t)$ dargestellt (schwarz). In seiner Nähe läuft eine Trajektorie (blau). Links ist das unkontrollierte System zu sehen. Die Trajektorie entfernt sich in der Periodenzeit T des Orbits $\xi(t)$ von diesem. Die zeitverzögerte Differenz ist durch die rote durchgezogene Linie verdeutlicht. Rechts ist der Fall zu sehen, in dem sich die Stabilität von $\xi(t)$ ändert ($\Lambda = 0$). Die zeitverzögerte Differenz verschwindet und die Kontrolle versagt.

jedoch nicht halten, wie später erläutert wird. Noch eine Aussage wird in dieser Veröffentlichung getroffen, die auch für autonome Systeme gilt: Hat der Zielorbit eine ungerade Anzahl von positiven reellen Floquet-Exponenten, dann kann er nicht mit einer *skalaren* Kontrollamplitude stabilisiert werden.

Dass bei fehlender Torsion keine Kontrolle möglich ist, lässt sich einfach veranschaulichen (vgl. Abb. 1.3). Der Floquet-Exponent bestimmt den Abstand zweier Punkte auf einer Trajektorie in der Nachbarschaft des periodischen Orbits nach einem Umlauf. Genau dieser Abstand entspricht der zeitverzögerten Differenz, auf der die Kontrollkraft aufbaut. Die Größe der Kontrollkraft ist direkt proportional zu dieser Differenz. Ändert der periodische Orbit unter Kontrolle seine Stabilität, vollführt der Lyapunov-Exponent einen Nulldurchgang ($\Lambda = 0$). Der Abstand der Trajektorie zum Orbit ändert sich also nicht. Die Differenz kann also nur durch die Torsion bedingt sein. Verschwindet die Torsion, fallen die beiden Punkte auf der Trajektorie nach einem Umlauf aufeinander. Die Differenz verschwindet ebenfalls, obwohl die Trajektorie den Zielorbit noch nicht erreicht hat. Somit gibt es keine Kontrollkraft, die die Trajektorie weiter auf den instabilen periodischen Orbit lenkt.

1.2 Analytische Näherung

Um qualitative Aussagen treffen zu können, muss die charakteristische Gleichung (1.13) ausgewertet werden. Da die explizite Form der Funktion $\Gamma[\kappa]$ unbekannt ist, muss auf eine Näherung zurückgegriffen werden. Die einfachste Näherung ist eine Reihenentwicklung bis zur linearen Ordnung:

$$\Gamma[\kappa] = \Gamma[0] + \left. \frac{d\Gamma}{d\kappa} \right|_{\kappa=0} \kappa + \mathcal{O}(\kappa^2) \quad (1.16)$$

Unter Berücksichtigung der Randbedingung (1.14) ergibt die charakteristische Gleichung (1.13):

$$\Lambda_\alpha + i\Omega_\alpha = \lambda_v + i\omega_v + (\chi' + i\chi'') K \left(1 - e^{-(\Lambda_\alpha + i\Omega_\alpha)\tau} \right) \quad (1.17)$$

Dabei stellt der komplexe Faktor $\chi' + i\chi''$ den Entwicklungskoeffizienten der linearen Ordnung dar:

$$\chi' + i\chi'' := \left. \frac{d\Gamma}{d\kappa} \right|_{\kappa=0} \quad (1.18)$$

Die Vorfaktoren χ' und χ'' enthalten alle Details des Systems und der Kopplung der Kontrollkraft an die inneren Freiheitsgrade. Auf die Gültigkeit dieser Näherung wird in [Just u. a., 2000] eingegangen.

Wie im vorigen Kapitel erläutert, ist zumindest für nicht-autonome Systeme die Torsion eine notwendige Bedingung für die Kontrollierbarkeit. Dies gilt zunächst nur für den Punkt, an dem sich die Stabilität

ändert. Das lässt sich unter anderem durch die strukturelle Stabilität von $\Omega = 0$ auch auf das freie System übertragen. Zur weiteren Analyse werden statt beliebiger Werte für ω der spezielle Fall $\omega T = \pi$ gewählt. Dieser Fall tritt in einer großen Klasse von Systemen auf, zum Beispiel, wenn das Chaos aus einem Feigenbaum-Szenarium entstanden ist. Geometrisch betrachtet bedeutet das, dass eine Nachbartrajektorie nach einem Umlauf auf der gegenüberliegenden Seite des Zielorbits vorbei läuft. Die nähere Umgebung des Zielorbits ist topologisch ein Möbiusband. Die Frequenz $\omega = \pi/T$ ist strukturell stabil, daher ändert sich der Imaginärteil der Funktion Γ nicht, und der Vorfaktor des linearen Terms in der Reihenentwicklung muss rein reell sein. Dementsprechend gilt $\chi'' = 0$. Mit der Frequenzabweichung $\Delta\Omega := \Omega - \omega$ lässt sich die charakteristische Gleichung (1.17) für einen solchen „Flip-Orbit“ in die Form

$$\Lambda_\alpha \tau + i\Delta\Omega_\alpha \tau = \lambda_v \tau - (-\tau \chi') K \left(1 + e^{(-\Lambda_\alpha \tau - i\Delta\Omega_\alpha \tau)}\right) \quad (1.19)$$

bringen. Die Wahl des Vorzeichens im Kontrollterm ist darin begründet, dass χ' im Allgemeinen negativ ist. Die charakteristische Gleichung lässt sich in dieser Form analytisch lösen und zwar mit Hilfe der Lambert-W-Funktion $W_\alpha(z_0) = z$, die die Gleichung

$$ze^z = z_0 \quad (1.20)$$

löst. Dabei gibt der Index α den entsprechenden Lösungszweig der mehrdeutigen Funktion an. Es ergibt sich eine Gleichung für die Floquet-Exponenten, die nur noch von den Lyapunov-Exponenten des unkontrollierten Orbits $\lambda\tau$, der Kontrollamplitude K und der Ankopplung χ' abhängt:

$$\Lambda_\alpha \tau + i\Delta\Omega_\alpha \tau = \lambda_v \tau - (-\tau \chi') K + W_\alpha \left((-\tau \chi') K e^{((- \tau \chi') K - \lambda_v \tau)} \right) \quad (1.21)$$

Sobald die Kontrollamplitude einen Wert $K \neq 0$ annimmt, entstehen unendlich viele Lösungszweige. Das liegt daran, dass das System mit Zeitverzögerung einen unendlich-dimensionalen Phasenraum besitzt. In Abbildung 1.4 sind einige dieser Lösungen für den größten positiven Floquet-Exponenten des freien Systems dargestellt. Im oberen Teil sind die Realteile der Floquet-Exponenten des kontrollierten Systems, die Lyapunov-Exponenten $\Lambda_\alpha \tau$ in Abhängigkeit der Kontrollamplitude $(-\tau \chi') K$ dargestellt. Der dominante Exponent ist rot bzw. blau, je nachdem, ob der Zielorbit stabil ($\Lambda < 0$) oder instabil ($\Lambda > 0$) ist. Ohne Kontrolle muss der Lyapunov-Exponent $\Lambda_\alpha \tau$ dem des freien Systems ($\lambda_v \tau$) entsprechen. Wird die reskalierte Kontrollamplitude erhöht, nimmt der Lyapunov-Exponent ab, bis er einen Nulldurchgang erfährt. Der Zielorbit wird stabil. Wird die Kontrollamplitude weiter vergrößert, kommt es zu einer Kollision mit einem der kontrollinduzierten Lyapunov-Exponenten (gelb). Dabei entsteht aus diesen beiden Floquet-Exponenten mit Imaginärteil π ein komplex konjugiertes Paar Floquet-Exponenten. Der Kollisionspunkt ist auch gut im unteren Teil der Abbildung zu sehen. Dort ist die Frequenzveränderung $\Delta\Omega_\alpha \tau$ mit derselben Farbgebung wie im oberen Teil zu sehen. Am Kollisionspunkt spaltet die Frequenzabweichung in zwei Zweige auf. Das komplex konjugierte Paar Floquet-Exponenten entsteht. Im Anschluss an diese Kollision wächst der Lyapunov-Exponent wieder an, bis er ein zweites Mal sein Vorzeichen ändert.

Die relevante Größe für den Abstand beider Nulldurchgänge des Lyapunov-Exponenten $\Lambda\tau$ ist der Lyapunov-Exponent $\lambda\tau$ des unkontrollierten Orbits. Wie an der Gleichung (1.19) zu sehen ist, liefert $\lambda\tau$ einen vertikalen Versatz der Kurven. Am Kurvenverlauf selbst ändert sich qualitativ nichts. Je größer $\lambda\tau$ ist, desto kleiner ist das Kontrollintervall. Ab einer gewissen Größe tritt dann keine Stabilisation des Zielorbits auf. Der Orbit ist sozusagen „zu instabil“.

An den beiden Vorzeichenwechseln des dominanten Lyapunov-Exponenten liegen Bifurkationen vor, die für den Stabilitätswechsel verantwortlich sind. An der unteren Grenze des Stabilitätsintervalls liegt eine inverse Periodenverdopplungs-Bifurkation (auch *Flip-Bifurkation*) vor, da die Torsion am Bifurkationspunkt $\Omega T = \pi$ beträgt. An der oberen Grenze sind die Floquet-Exponenten komplex konjugiert. Deshalb liegt eine Hopf-Bifurkation vor. Werden die Bedingungen $\Lambda\tau = 0$ und $\Omega\tau = \pi$ in die Gleichung (1.19) eingesetzt, so ergibt sich für die Kontrollamplitude K_{Fl} , bei der die Flip-Bifurkation auftritt:

$$K_{Fl} = \frac{\lambda\tau}{2(-\tau \chi')} \quad (1.22)$$

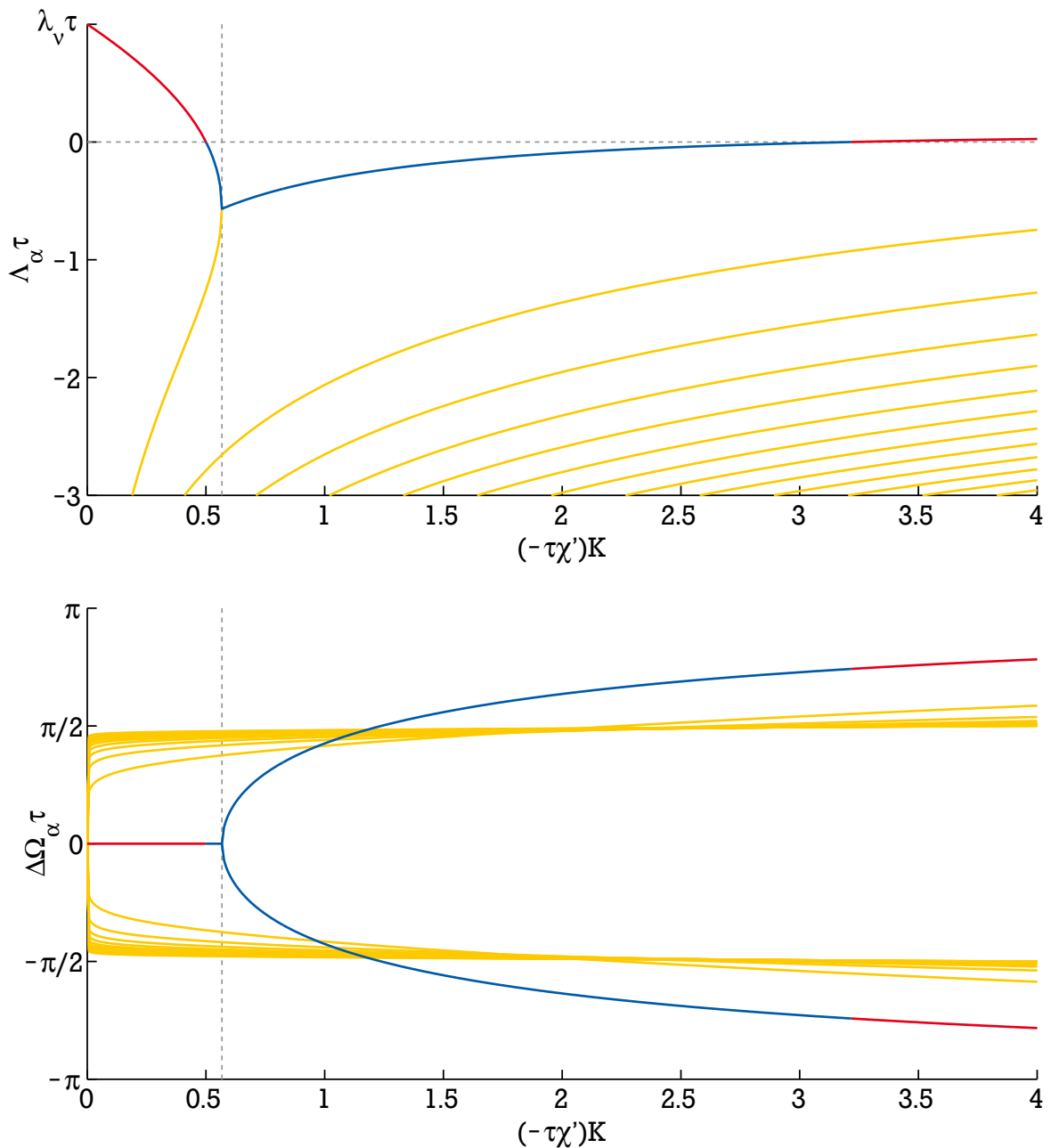


Abbildung 1.4.: **Oben:** Lyapunov-Exponent des kontrollierten Orbits in Abhängigkeit der reskalierten Kontrollamplitude für einen der Lyapunov-Exponenten des freien Systems ($\lambda\tau = 1$). Der Zweig, der entscheidend für die Stabilität des periodischen Orbits verantwortlich ist, ist rot für den instabilen Bereich und blau für den stabilen dargestellt. Die gelben Zweige sind die, die unter Kontrolle entstehen. Sie haben keinen direkten Einfluss auf die Stabilität. Der Kollisionspunkt des entscheidenden Zweigs und eines kontrollinduzierten ist durch eine vertikale graue gestrichelte Linie gekennzeichnet. **Unten:** Die Frequenzabweichung unter Kontrolle, ebenfalls in Abhängigkeit der reskalierten Kontrollamplitude. Die Farbgebung ist äquivalent zur oberen Abbildung. Es sind nur die Zweige zu sehen, die auch in der oberen Abbildung dargestellt sind.

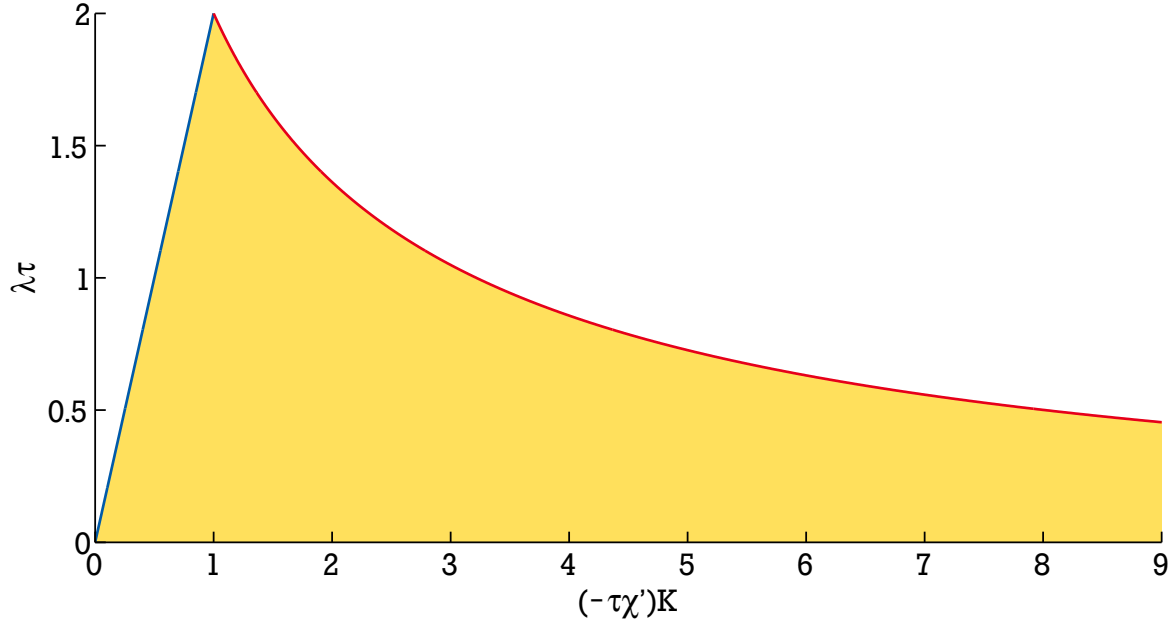


Abbildung 1.5.: Die gelbe Fläche markiert den Bereich, in dem Kontrolle erfolgreich ist. Das Gebiet wird durch die Flip-Bifurkation (blau) und die Hopf-Bifurkation (rot) begrenzt. Für größer werdende $\lambda\tau$ schrumpft das Kontrollintervall, bis es bei $\lambda\tau = 2$ verschwindet.

Dabei ist λ der größte Lyapunov-Exponent des unkontrollierten Orbits. Für die obere Grenze des Kontrollintervalls ergibt die Gleichung (1.19) mit der Bedingung $\Lambda = 0$ durch Trennung nach Real- und Imaginärteil:

$$K_{Ho} = \underbrace{\frac{\lambda\tau}{2(-\tau\chi')}}_{K_{Fl}} \left(1 + \left(\frac{\Delta\Omega_{Ho}\tau}{\lambda\tau} \right)^2 \right) \quad (1.23a)$$

$$\lambda\tau = \frac{\Delta\Omega_{Ho}\tau}{\tan\left(\frac{\Delta\Omega_{Ho}\tau}{2}\right)} \quad (1.23b)$$

Dabei entspricht $\Delta\Omega_{Ho}$ der Frequenzabweichung am Hopf-Bifurkationspunkt. An Gleichung (1.23b) ist zu erkennen, dass die Frequenzabweichung auf den Wertebereich $\Delta\Omega_{Ho} \in [-\pi, \pi]$ beschränkt ist. Wenn beide Bifurkationen zusammenfallen ($K_{Fl} = K_{Ho}$), versagt die Kontrolle, da kein Kontrollintervall mehr vorhanden ist. Das tritt auf, wenn $\Delta\Omega_{Ho} = 0$ und dadurch $\lambda\tau = 2$ ist. Für größere Werte des Lyapunov-Exponenten $\lambda\tau$ ist keine Kontrolle möglich, da der Orbit zu instabil ist. Ein anderer Grenzfall sind schwach instabile Orbits ($\lambda\tau \searrow 0$). Für sie divergiert das Kontrollintervall.

In Abbildung 1.5 ist der Sachverhalt illustriert. Das Gebiet erfolgreicher Kontrolle ist gelb eingefärbt. Zur einen Seite hin wird das Kontrollgebiet durch die Periodenverdopplungs-Bifurkation (blau) begrenzt, zur anderen von der Hopf-Bifurkation (rot). Mit größer werdendem $\lambda\tau$ schrumpft das Kontrollintervall, bis bei $\lambda\tau = 2$ beide Bifurkationen gleichzeitig auftreten und das Kontrollintervall verschwindet.

2 Kontrolle torsionsfreier Orbits

Wie im vorherigen Kapitel beschrieben, ist es mit der Pyragas-Kontrolle unmöglich, nicht-autonome torsionsfreie Systeme zu kontrollieren. Bei autonomen Systemen muss diese Einschränkung nicht gelten, da sie eine Goldstone-Mode besitzen. Zuerst haben sich Fiedler u. a. [2007] und Just u. a. [2007] mit diesem Fall beschäftigt. In beiden Arbeiten wird die Hopf-Normalform betrachtet. Sie bietet sich an, da sie auch mit zeitverzögerter Rückkopplung umfangreich analytisch zu behandeln ist. Es wird somit eine Brücke zwischen den sonst sehr abstrakten allgemeingültigen theoretischen Ergebnissen und den weniger aussagekräftigen numerischen Simulationen geschlagen.

Ein solches Modellsystem zu behandeln, ist in der nichtlinearen Dynamik nichts Ungewöhnliches. Es ist mit derartigen mathematischen Modellen möglich, das grundsätzliche Verhalten physikalisch-realer Systeme abzuleiten. Liegt in einem realen nichtlinearen System eine Hopf-Bifurkation vor, so ist es mittels Normalformanalyse möglich, diese in eine Hopf-Normalform zu überführen.

2.1 Grundlegende Idee

Dieser Abschnitt erläutert die grundlegende Idee der Kontrolle torsionsfreier Orbits. Dabei wird auf eine anschauliche Darstellung Wert gelegt, um den prinzipiellen Mechanismus der Kontrolle zu erläutern. Eine derartige anschauliche Interpretation kann natürlich nicht bis ins letzte Detail konsistent sein. Eine analytisch korrekte Darstellung wird in Kapitel 2.2 gegeben.

Die sogenannte „odd number limitation“ [Nakajima, 1997] gilt nur für nicht-autonome Systeme. Sie besagt, dass sich instabile Orbits nicht-autonomer Systeme nur dann mit der zeitverzögerten Rückkopplungskontrolle stabilisieren lassen, wenn sie eine gerade Anzahl von positiven reellen Floquet-Exponenten besitzen. Der Hinweis in einer Fußnote von Nakajima, dass der Beweis für autonome Systeme analog gehen müsste, wurde von vielen als richtig hingenommen. Für einfache Kopplungsschemata, wie die Diagonalkopplung, gilt dies aus anderen Gründen auch allgemein [Just u. a., 1997]. Die Schwierigkeit bei der Kontrolle torsionsfreier Orbits besteht daher in der richtigen Ankopplung der Kontrollkräfte an das System. Insbesondere bei hochdimensionalen Systemen mit vielen instabilen Floquet-Exponenten stellt dies ein großes Problem dar. Es liegt also nahe, ein möglichst einfaches System wie die Hopf-Normalform zu wählen, um die prinzipielle Machbarkeit zu zeigen.

Für die von Fiedler u. a. [2007] vorgeschlagene Ankopplung der Kontrollkraft muss zusätzlich zur Autonomie des Systems noch eine nichtlineare Frequenzverstimmung vorliegen, die dafür sorgt, dass die Umlauffrequenz stark von der Amplitude der Oszillation abhängt. Diese Frequenzverstimmung sorgt dafür, dass immer eine nichtverschwindende Kontrollkraft vorhanden ist, solange der instabile periodische Orbit nicht erreicht ist. Dieser Zusammenhang wird in Abbildung 2.1 veranschaulicht. In der Abbildung links ist ein System dargestellt, das keine Frequenzverstimmung besitzt. Das rechte System hingegen hat eine ausgeprägte Frequenzverstimmung. Der instabile periodische Orbit $\xi(t) = \xi(t + T)$ besitzt keine Torsion. Im oberen Teil der Abbildung ist blau eine Trajektorie dargestellt, wie sie im unkontrollierten System im Laufe der Zeit T verläuft. Die Differenz zwischen Start- und Endpunkt entspricht der Kontrollkraft (rot durchgezogen). Der untere Teil der Abbildung zeigt den Fall, in dem sich die Stabilität des periodischen Orbits ändert und er attraktiv wird. Im linken System verschwindet die Kontrollkraft, obwohl der periodische Orbit noch nicht erreicht wurde. Die Kontrolle versagt. Im rechten System mit der nichtlinearen Frequenzverstimmung bleibt eine endliche Differenz zwischen Start- und Endpunkt. Diese Kontrollkraft zeigt jedoch entlang der Trajektorie und ist nicht auf den periodischen Orbit gerichtet. An

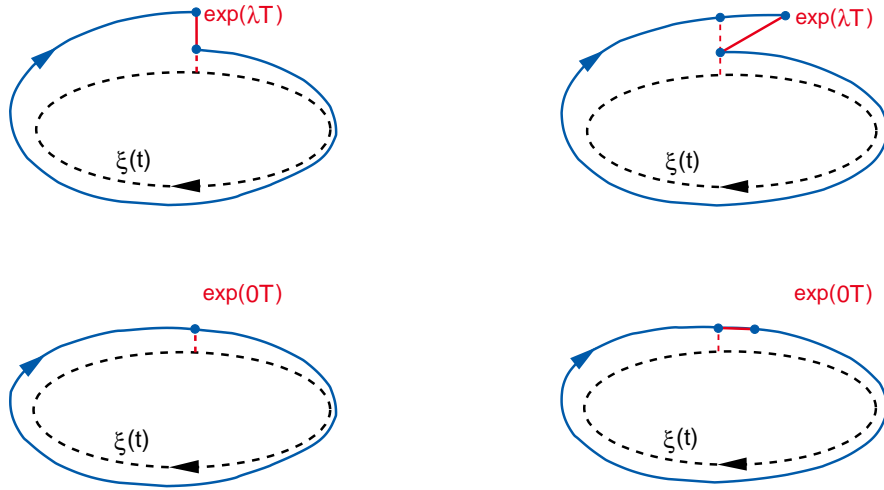


Abbildung 2.1.: Gegenüberstellung torsionsfreier Orbits. Links ist ein System ohne nichtlineare Frequenzverstimmung dargestellt, rechts mit. Die oberen Bilder zeigen eine Trajektorie ohne Kontrolle, wie sie vom instabilen periodischen Orbit $\xi(t) = \xi(t + T)$ wegläuft. Die unteren Bilder stellen den Punkt dar, an dem sich die Stabilität des Orbits $\xi(t)$ ändert und er attraktiv wird. Ohne nichtlineare Frequenzverstimmung verschwindet die Kontrollkraft, obwohl der Orbit $\xi(t)$ noch nicht erreicht wurde, und die Kontrolle versagt. Im anderen Fall bleibt durch die nichtlineare Frequenzverstimmung eine endliche Kontrollkraft (rot), die jedoch in Bewegungsrichtung zeigt und nicht auf den Orbits $\xi(t)$ gerichtet ist.

diesem Punkt setzt die Ankopplung der Kontrollkraft an. Eine intuitive Wahl ist die Ankopplung über eine Drehmatrix:

$$\mathbf{K} = K \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

Die Drehmatrix sorgt dafür, dass die Kontrollkraft nicht mehr ausschließlich entlang der Trajektorie wirkt, sondern dass sie zumindest teilweise auf den periodischen Orbit gerichtet ist. Die Kontrolle des periodischen Orbits wird somit möglich. Für einfache zweidimensionale Systeme wie den Stuart-Landau-Oszillator stellt die Wahl der Ankopplung kein nennenswertes Problem dar. Die Kontrolle eines Lorenz-Attraktors ist in diesem Punkt um einiges schwieriger. Bei physikalisch realistischen Systemen, etwa bei Spinresonanz-Experimenten, scheitert das Vorhaben alleine schon an dem Problem, dass im Allgemeinen nur eine skalare Messgröße vorliegt. Selbst wenn die, sagen wir, 10^{23} Freiheitsgrade experimentell einzeln zugänglich wären, wäre die Ankopplung ein nichttriviales Unterfangen – sowohl theoretisch, als auch experimentell.

Dieser Umstand ändert jedoch nichts daran, dass hier die prinzipielle Machbarkeit im Vordergrund steht. Im Endeffekt kann man nur an einfachen leicht verständlichen Systemen etwas lernen. Das so erlangte Wissen ist notwendig, um überhaupt komplexere Aufgaben bewältigen zu können.

2.2 Analytische Behandlung

Als ein allgemeines Modellsystem der zeitverzögerten Rückkopplungskontrolle eines torsionsfreien periodischen Orbits wird die Hopf-Normalform herangezogen. Im Weiteren soll nur der Fall betrachtet werden, in dem diese Bifurkation subkritisch ist. Mittels einer komplexen Koordinate $z(t)$ kann die Bewegungsgleichung inklusive der zeitverzögerten Rückkopplungskontrolle in der Form

$$\dot{z} = (\lambda + i)z + (1 + i\gamma)|z|^2 z - Ke^{i\beta}(z - z_\tau) \quad (2.2)$$

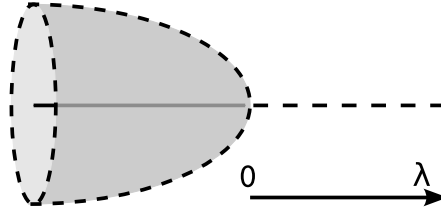


Abbildung 2.2.: Subkritische Hopf-Bifurkation. Unterhalb des Bifurkationspunkts existieren ein stabiler Fixpunkt und ein instabiler periodischer Orbit. Am Bifurkationspunkt kollidieren beide miteinander. Der periodische Orbit verschwindet, der Fixpunkt wird instabil. Gestrichelte Linien deuten Instabilität an, durchgezogene Stabilität.

dargestellt werden. Die Zeitabhängigkeit $z = z(t)$ wurde nicht explizit angegeben und die Kurzschreibweise $z_\tau = z(t - \tau)$ mit der Verzögerungszeit $\tau \geq 0$ verwendet. Die reellwertigen Parameter λ und γ bestimmen die Systemeigenschaften der Hopf-Normalform. Der Kontrollparameter λ gibt den Abstand zum Bifurkationspunkt an. γ ist die nichtlineare Frequenzverstimmung (engl. *chirp* oder *twist*), die quadratisch mit dem Radius $|z|$ geht. Diese Eigenschaft ist in vielen Bereichen von großer Bedeutung, zum Beispiel immer dann, wenn nichtlineare Dispersion eine wichtige Rolle spielt. Sowohl die Hopf-Frequenz am Bifurkationspunkt als auch die nichtlineare Dämpfung wurden auf eins normiert. Schließlich gibt es noch die reellwertige Kontrollamplitude K und die dazugehörige Phase β . Diese Ankopplung ist nur eine von vielen möglichen, bietet jedoch den Vorteil einer einfachen analytischen Behandlung.

Für das System ohne Kontrolle ($K = 0$) existiert ein trivialer Fixpunkt $z_* = 0$, der für negative λ stabil und für positive instabil ist. Ein periodischer Orbit der Form $z_p = R_p \exp(i\Omega_p t)$ mit dem Radius R_p und der (Kreis-)Frequenz Ω_p existiert unter der Bedingung $\lambda < 0$ mit:

$$R_p = \sqrt{-\lambda} \quad (2.3a)$$

$$\Omega_p = 1 + \gamma R_p^2 \quad (2.3b)$$

Die Linearisierung um den periodischen Orbit liefert den trivialen Eigenwert $\lambda^{(1)} = 0$, der die Goldstone-Mode beschreibt, und einen Eigenwert $\lambda^{(2)} = -2\lambda$. Da der periodische Orbit nur für negative λ existiert, ist er instabil (vgl. Abb. 2.2). Eine Besonderheit tritt für $\lambda\gamma \geq 0$ ein, weil in diesem Fall die Frequenz $\Omega = 1 + \gamma R^2$ für den Radius $R_C = (-\gamma)^{-1/2}$ verschwindet. Es existiert dann ein Ring aus unendlich vielen Fixpunkten, die einen homoklinen Ring bilden. Beim Übergang über diesen homoklinen Ring wechselt die Frequenz das Vorzeichen und somit das System seine Umlaufrichtung. Homokline Ringe sind strukturell nicht stabil und können unter Störungen zu komplizierten Bifurkationsszenarien führen. Insbesondere in experimentellen Systemen, die immer Störungen unterliegen, kann das zu Problemen führen. Einfachheitshalber wird daher die Beschränkung $\lambda\gamma < 0$ angenommen.

Der instabile periodische Orbit soll mittels zeitverzögerter Rückkopplungskontrolle stabilisiert werden. Dabei erfordert ein *nichtinvasives Kontrollschema*, dass die Verzögerungszeit mit einem Vielfachen n der Periode des Zielorbits übereinstimmt:

$$\tau = n \frac{2\pi}{\Omega_p} \quad (2.4)$$

Erreicht das System den Zielorbit, auch Pyragas-Orbit genannt, gilt $z = z_\tau$ und die Kontrollkraft verschwindet. Durch den Kontrolleingriff werden darüber hinaus noch weitere periodische Orbits erzeugt. Mit dem Ansatz für harmonische periodische Lösungen $z_i = R_i \exp(i\Omega_i t)$ ergibt sich eine transzendente Gleichung für Ω_i , die, außer für den Fall $K = 0$, eine Vielzahl von Lösungen besitzt:

$$R_i = \sqrt{-\lambda + K (\cos(\beta) - \cos(\beta - \Omega_i \tau))} \quad (2.5a)$$

$$\Omega_i = (1 + \gamma R_i^2) - K (\sin(\beta) - \sin(\beta - \Omega_i \tau)) \quad (2.5b)$$

Stimmt die Frequenz Ω_i mit der des Pyragas-Orbits überein ($\Omega_i = \Omega_p$), reduziert sich die Bedingungen (2.5) für Radius und Frequenz unter Verwendung von (2.4) auf die Lösung (2.3) des unkontrollierten Systems. Der Kontrolleingriff ist dann in der Tat nichtinvasiv.

Die Linearisierung der Bewegungsgleichung (2.2) um den Pyragas-Orbit $z_p = R_p \exp(i\Omega_p t)$ mit dem Ansatz $z = (1 + \delta r + i\delta\varphi) \cdot z_p$ liefert:

$$\begin{pmatrix} \dot{\delta r} \\ \dot{\delta\varphi} \end{pmatrix} = 2R_p \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \gamma & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta r \\ \delta\varphi \end{pmatrix} - K \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta r - \delta r_\tau \\ \delta\varphi - \delta\varphi_\tau \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

Unter der Bedingung, dass die Differenzialgleichung keine explizite Zeitabhängigkeit besitzt, lässt sich zur Lösung ein Floquet-Ansatz wählen:

$$\begin{pmatrix} \delta r \\ \delta\varphi \end{pmatrix} = e^{-\Lambda t} \mathbf{Q}(t) \quad (2.7)$$

Die Floquet-Exponenten Λ des Pyragas-Orbits lassen sich dann anhand der Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$P(\Lambda) = \det \left[2R_p \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \gamma & 0 \end{pmatrix} - K \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} (1 - e^{-\Lambda\tau}) - \begin{pmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & \Lambda \end{pmatrix} \right] \quad (2.8)$$

bestimmen. Da es sich bei der Hopf-Normalform auch unter Kontrolleinfluss um ein autonomes System handelt, existiert immer eine Lösung $\Lambda = 0$, die der **Goldstone-Mode** entspricht. Das lässt sich recht einfach überprüfen. Für $\Lambda = 0$ verschwindet der Term $(1 - e^{-\Lambda\tau})$ und der Kontrollterm liefert keinen Beitrag zum charakteristischen Polynom. Das charakteristische Polynom entspricht dann dem ohne Kontrolle, das ja nach Voraussetzung die Lösung $\Lambda = 0$ hat.

2.2.1 Bifurkations-Analyse

In diesem Abschnitt wird der kontrollierte Stuart-Landau-Oszillator bezüglich der auftretenden Bifurkationen genauer untersucht. Dabei stehen die direkt an der Stabilisierung des Pyragas-Orbits beteiligten Bifurkationen im Mittelpunkt des Interesses.

Zu Beginn ist zu klären, welche Bifurkationen dazu beitragen, dass der Pyragas-Orbit stabilisiert wird. Prinzipiell kommen alle vier lokalen Kodimension-eins-Bifurkationen in Frage: Flip-, Hopf-, Sattel-Knoten- und transkritische Bifurkation. Bei der Hopf-Normalform ist der Floquet-Exponent rein reell. Da die Torsion $\Omega = 0$ strukturell stabil ist, bleibt der Floquet-Exponent bei stetiger Änderung der Kontrollamplitude reell, weil er zunächst keinen Kollisionspartner hat, mit dem er ein komplex konjugiertes Paar bilden kann¹. Dadurch reduziert sich die Anzahl der möglichen Bifurkationen in diesem speziellen System erheblich. Die Flip- und die Hopf-Bifurkation können direkt ausgeschlossen werden, da sie eine endliche Torsion voraussetzen. Bei einer Beschränkung auf $\tau = 2\pi/\Omega_p$ bleibt nur die transkritische Bifurkation. Eine Sattel-Knoten-Bifurkation kann ebenfalls ausgeschlossen werden, da durch sie der Pyragas-Orbit vernichtet werden würde. Auf dem Pyragas-Orbit verschwindet jedoch die Kontrollkraft. Das heißt, dass der Pyragas-Orbit unter Kontrolle nicht verschwinden kann. Er ist immer Lösung der Differenzialgleichung. Diese Bedingung erfüllt die transkritische Bifurkation. Bei der transkritischen Bifurkation kollidieren ein stabiler und ein instabiler Orbit miteinander und tauschen dabei ihre Stabilitäten aus.

Neben der transkritischen Bifurkation, die für die Stabilisierung des Pyragas-Orbits sorgt, gibt es noch eine weitere Bifurkation, die das Kontrollgebiet begrenzt. Es könnte sich dabei um jede lokale Kodimension-eins-Bifurkation handeln, außer der Sattel-Knoten-Bifurkation. Es wird sich zeigen, dass

¹ vorausgesetzt das Kontrollschema führt keinen weiteren positiven reellen Floquet-Exponenten ein [Pyragas, 2001].

dies eine Hopf-Bifurkation ist. Im folgenden Abschnitt „*Begrenzungen des Kontrollgebiets*“ wird genauer darauf eingegangen.

Es bleibt noch zu klären, woher der stabile Orbit kommt, der seine Stabilität in der transkritischen Bifurkation an den Pyragas-Orbit übergibt. Das betrachtete System besitzt ohne Kontrolle nur einen instabilen Pyragas-Orbit. Eine Sattel-Knoten-Bifurkation, die je einen stabilen und einen instabilen Orbit entstehen lässt, ist eine Möglichkeit. Im Abschnitt „*Ursprung der kontrollinduzierten Orbits*“ wird dieser Fall behandelt.

Im Folgenden wird die normierte Kontrollamplitude $\kappa = \tau K$ verwendet. Die graphische Darstellung des fünf-dimensionalen Parameterraums² beschränkt sich auf die κ - β -Ebene, da sie, im Gegensatz zu der in [Fiedler u. a., 2007] und [Just u. a., 2007] verwendeten λ - τ -Ebene, experimentelle Relevanz hat. Es hat sich herausgestellt, dass für die graphische Darstellung eine κ_x - κ_y -Ebene günstiger als eine κ - β -Ebene ist, wobei $\kappa_x = \kappa \cos \beta$ und $\kappa_y = \kappa \sin \beta$ gewählt wurden.

Begrenzungen des Kontrollgebiets

Transkritische Bifurkation

Die transkritische Bifurkation spielt eine entscheidende Rolle bei der Stabilisierung des Pyragas-Orbits. Am Bifurkationspunkt vollzieht der rein reelle Floquet-Exponent Λ einen Nulldurchgang. Das charakteristische Polynom hat jedoch wegen der Goldstone-Mode eine doppelte Nullstelle. Sie lässt sich am einfachsten durch eine Entwicklung des charakteristischen Polynoms um $\Lambda = 0$ berechnen [Just u. a., 2007]. Aus der Gleichung des charakteristischen Polynoms (2.8) ergibt sich dann:

$$0 = \underbrace{2\lambda\tau (1 + \kappa (\cos \beta + \gamma \sin \beta))}_{c_1} \Lambda\tau + \underbrace{\left(-\lambda\tau \kappa (\cos \beta + \gamma \sin \beta) + |1 + \kappa \exp(i\beta)|^2 \right)}_{c_2} (\Lambda\tau)^2 + \mathcal{O}(\Lambda^3) \quad (2.9)$$

Eine doppelte Nullstelle des Polynoms liegt vor, wenn der lineare Anteil c_1 verschwindet. Die Bedingung für die transkritische Bifurkation lautet demnach:

$$\kappa (\cos \beta + \gamma \sin \beta) = -1 \quad (2.10)$$

Um weiterführende Aussagen über die Art der Bifurkation zu finden, lohnt ein Blick auf den quadratischen Term der Entwicklung c_2 . In Verbindung mit der Bedingung der transkritischen Bifurkation (2.10) lässt er sich auf die Form

$$c_2 = \lambda\tau + |1 + \kappa \exp(i\beta)|^2 \quad (2.11)$$

bringen. In unmittelbarer Nähe der Bifurkation, in der die Näherung noch gültig ist, müssen sich der lineare und quadratische Term gegenseitig aufheben. Es soll zum Beispiel der Fall betrachtet werden, dass c_2 positiv ist. Es gilt dann für die Zentralmannigfaltigkeit des Pyragas-Orbits:

$$1 + \kappa (\cos \beta + \gamma \sin \beta) \begin{cases} < 0 & \text{stabil} \\ > 0 & \text{instabil} \end{cases} \quad (2.12)$$

Das ist natürlich keine notwendige Bedingung. Zum einen berücksichtigt sie keine komplex konjugierten Eigenwerte, zum anderen gilt sie nur in unmittelbarer Nähe der transkritischen Bifurkation. Dennoch ist sie ausreichend, um Aussagen über die Stabilität des Pyragas-Orbits zu treffen, wenn einem diese Einschränkungen bewusst sind.

Um weiter Aussagen über die Stabilität des Pyragas-Orbits zu treffen, müssen die komplex konjugierten Lösungen des charakteristischen Polynoms (2.8) einer genaueren Betrachtung unterzogen werden.

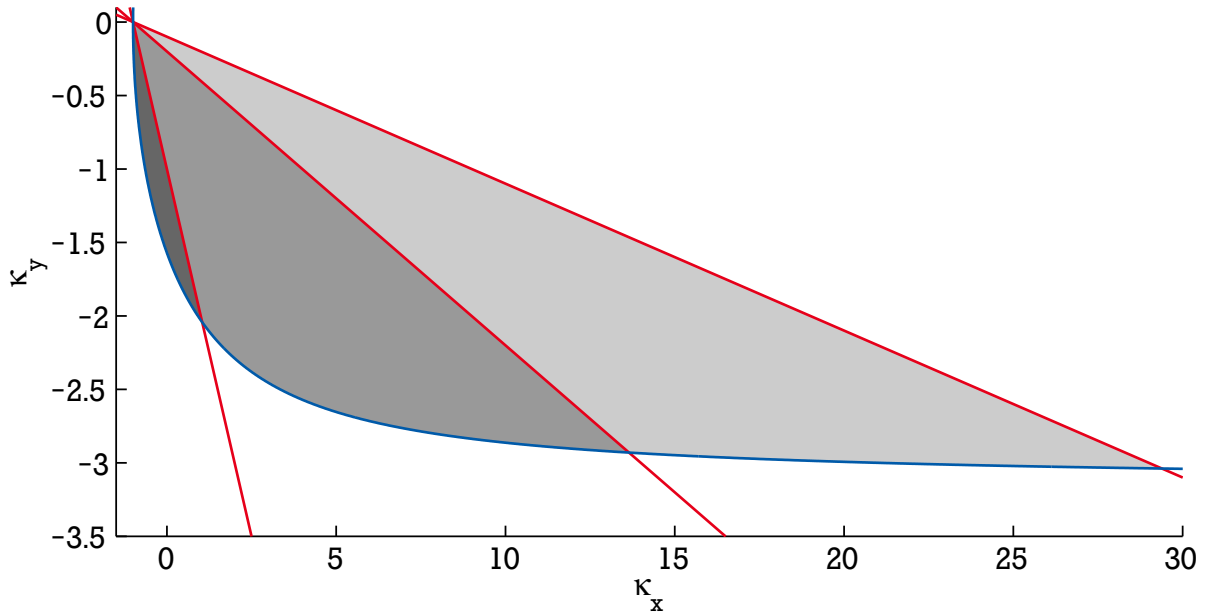


Abbildung 2.3.: Kontrollgebiete für verschiedene Werte von γ . Die Hopf-Bifurkationslinie (blau) für den Grenzfall $\lambda \nearrow 0$ und die transkritischen Bifurkationen (rot) sind ebenfalls dargestellt. Es ist ein deutlicher Unterschied in der Größe der Kontrollintervalle zu sehen. Die hellgraue Fläche entspricht dem Wert $\gamma = 10$, die mittelgraue dem Wert $\gamma = 5$ und die dunkelgraue $\gamma = 1$. ($\lambda = -0.1$)

Hopf-Bifurkation

Bei einer Hopf-Bifurkation wechselt der Realteil eines komplex konjugierten Paares von Floquet-Exponenten sein Vorzeichen. Demnach ist der Floquet-Exponent Λ am Bifurkationspunkt rein imaginär. Aufgrund topologischer Eigenschaften des Systems fällt die Hopf-Bifurkation des Pyragas-Orbits für den Grenzfall $\lambda \nearrow 0$ mit der Hopf-Bifurkation des trivialen Fixpunkts zusammen [Fiedler u. a., 2007]. In [Just u. a., 2007] wurde explizit gezeigt, dass das tatsächlich zutrifft.

Für den Grenzfall $\lambda \nearrow 0$ kann die Bewegungsgleichung (2.2) um den trivialen Fixpunkt entwickelt werden. Der Ansatz $\Lambda\tau = i\phi_h$ liefert:

$$i\phi_h = \lambda\tau + i\tau - \kappa e^{i\beta} (1 - e^{-i\phi_h}) \quad (2.13)$$

Die Bedingungen der Bifurkationslinie ergeben sich durch eine Aufspaltung in Real- und Imaginärteil. Dabei lässt sich die reskalierte Hopf-Frequenz $\phi_h = \Omega_i\tau$ als Bahnparameter verwenden:

$$\lambda\tau = \kappa (\cos(\beta) - \cos(\beta - \phi_h)) \quad (2.14a)$$

$$\tau = \kappa (\sin(\beta) - \sin(\beta - \phi_h)) + \phi_h \quad (2.14b)$$

Im Gebiet, das von der transkritischen Bifurkation und der Hopf-Bifurkation (für $\lambda \nearrow 0$) eingeschlossen wird, kann der Pyragas-Orbit stabilisiert werden.

Die Gleichungen (2.14) enthalten keine Aussage darüber, ob eine sub- oder superkritische Bifurkation vorliegt. Um derartige Aussagen zu erhalten, ist eine Normalformanalyse notwendig. Diese ist in der Veröffentlichung von Just [Just u. a., 2007] zu finden. Entscheidend für die Art der Bifurkation ist der kubische Term, genauer sein Realteil:

$$c_{re} = 1 + \kappa (\cos(\beta - \phi_h) + \gamma \sin(\beta - \phi_h)) \quad (2.15)$$

² Die fünf Parameter sind λ , γ , τ , κ und β .

Ist der Realteil negativ, liegt eine superkritische Hopf-Bifurkation vor, ist er positiv eine subkritische. Eine Kodimension-zwei-Bifurkation liegt vor, wenn der Realteil c_{re} verschwindet. Dann gibt es einen Übergang von einer superkritischen zu einer subkritischen Hopf-Bifurkation oder umgekehrt. Das kann z.B. der Fall sein, wenn die Hopf-Bifurkation mit einer Sattel-Knoten-Bifurkation kollidiert.

Ursprung der kontrollinduzierten Orbits

Sattel-Knoten-Bifurkation der kontrollinduzierten Orbits

Eine Sattel-Knoten-Bifurkation kann den benötigten stabilen Orbit hervorbringen. Bei einer Sattel-Knoten-Bifurkation entstehen zwei reellwertige Floquet-Exponenten bei $\Lambda = 0$ – ein stabiler und ein instabiler. Das charakteristische Polynom der kontrollinduzierten Orbits müsste demnach eine doppelte Nullstelle haben. Ein äquivalentes und einfacheres Kriterium lässt sich auf die transzendente Gleichung für die Frequenz der kontrollinduzierten Orbits Ω_i zurückführen [Just u. a., 2007]. Die rechte Seite der Gleichung (2.5b) ist eine harmonische Funktion in Ω_i . Diese Funktion mit der Diagonalen geschnitten ergeben die Lösungen der Gleichung. Immer wenn die harmonische Funktion die Diagonale berührt, entstehen zwei neue Lösungen – eine stabile und eine instabile. Dieser Fall tritt ein, wenn Gleichung (2.5b) erfüllt ist und zusätzlich die Ableitungen ihrer rechten und linken Seite nach Ω_i gleich sind. Unter Verwendung von $\phi_i = \Omega_i \tau$ ergibt sich:

$$0 = 1 + \kappa (\cos(\beta - \phi_i) + \gamma \sin(\beta - \phi_i)) \quad (2.16)$$

Ein Vergleich der Gleichungen (2.16) und (2.15) zeigt, dass die Sattel-Knoten-Bifurkationslinien für den Fall $R_i = 0$ mit den Hopf-Bifurkationslinien der trivialen Fixpunkte kollidieren. Es gilt dann $\phi_i = \phi_h$. Dabei geht eine superkritische Hopf-Bifurkation in eine subkritische über und umgekehrt.

Interessant ist der Grenzfall, in dem die Sattel-Knoten-Bifurkation den Pyragas-Orbit berührt. Er tritt ein, wenn $\phi_i = 2\pi$ gilt. Gleichung (2.16) liefert dann die Bedingung für die transkritische Bifurkation (2.10). Damit handelt es sich um eine Kodimension-zwei-Bifurkation.

2.2.2 Das Zusammenspiel der Bifurkationen

Nachdem die bisher bekannten Bifurkationen besprochen wurden, bleibt die Frage, wie ein Bifurkationsdiagramm aussieht, das den Kontrollmechanismus veranschaulicht. In Abbildung 2.4 ist genau so ein Bifurkationsdiagramm zu sehen. Es sind für einen festen Wert des Winkels β die Radien der kontrollinduzierten Orbits und der Radius des Pyragas-Orbits R_p über κ aufgetragen. Die Stabilität ist durch gestrichelte (instabil) und durchgezogene Linien (stabil) gekennzeichnet. Der Pyragas-Orbit ist schwarz, die kontrollinduzierten hellgrau und der triviale Fixpunkt dunkelgrau. In Abbildung 2.4 liegt die Sattel-Knoten-Bifurkation (grün) knapp oberhalb des Pyragas-Orbits. Ihr stabiler Zweig wandert bei Erhöhung der Kontrollamplitude κ auf den Pyragas-Orbit zu, bis er ihm in der transkritischen Bifurkation (rot) die Stabilität übergibt und selbst instabil wird. Bei weiterer Erhöhung der Kontrollamplitude κ endet der nun instabile Orbit in einer subkritischen Hopf-Bifurkation des trivialen Fixpunkts (gelb). Der andere Zweig der Sattel-Knoten-Bifurkation ist instabil. Bei Erhöhung der Kontrollamplitude wächst zunächst sein Radius langsam an. Dann wird er wieder kleiner, bis er in einer weiteren Hopf-Bifurkation des trivialen Fixpunkts endet. In diesem Bifurkationsdiagramm ist die Hopf-Bifurkation des Pyragas-Orbits nicht zu sehen, da sie bei deutlich höheren Kontrollamplituden auftritt als dargestellt.

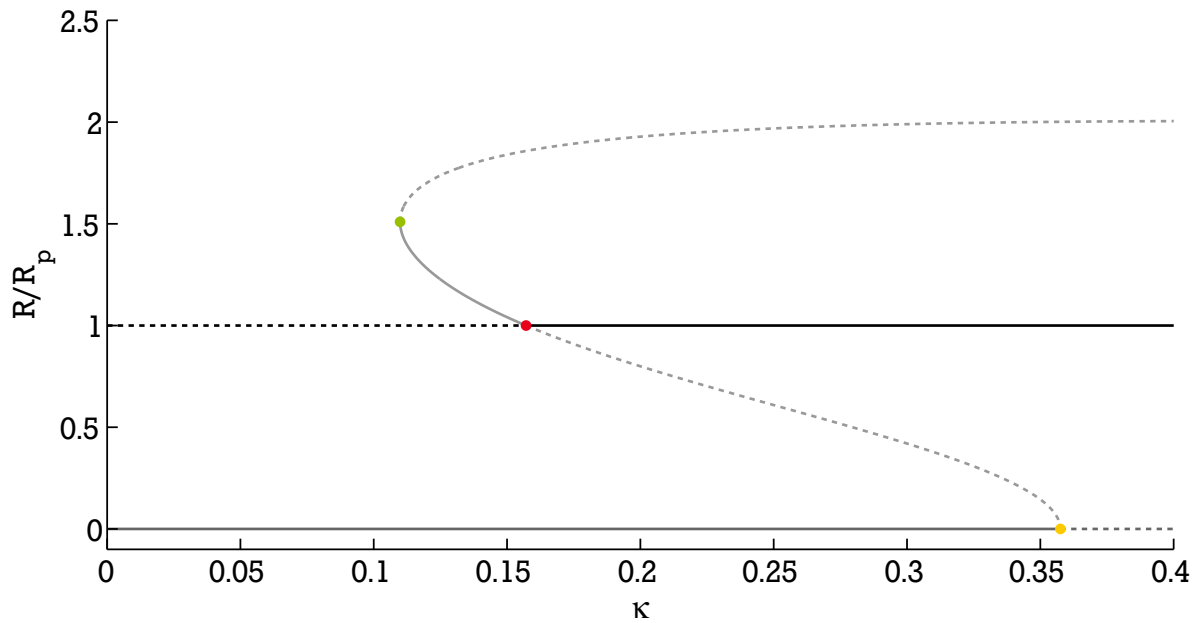


Abbildung 2.4.: Bifurkationsdiagramm unter Kontrolle. Der Pyragas-Orbit ist schwarz, der kontrollinduzierte Orbit hellgrau, der triviale Fixpunkt dunkelgrau. Für eine durchgezogene Linie ist der jeweilige Zustand stabil, für eine gestrichelte instabil. Die Bifurkationen werden durch die farbigen Punkte markiert. Die transkritische Bifurkation ist rot, die Sattel-Knoten-Bifurkation grün und die Hopf-Bifurkation des trivialen Fixpunkts ist gelb. ($\lambda = -0,02$; $\gamma = 10$; $\beta = -\pi/4$)

Teil II.

Synkretismus



3 Numerik

Um die Experimente vorzubereiten, wurden numerische Simulationen durchgeführt. Um einen größtmöglichen Erfolg zu garantieren, sollte das experimentelle System zweidimensional sein und eine Hopf-Bifurkation des trivialen Fixpunkts zeigen, damit es der Hopf-Normalform sehr ähnlich ist. Die Simulationen sollten zum einen klären, welche Systeme sich besonders gut eignen, zum anderen, ob in den experimentell umsetzbaren Parameterbereichen erfolgreiche Kontrolle möglich ist. Der Fokus lag dabei auf dem van-der-Pol- und dem Stuart-Landau-Oszillator. Eine Umsetzung des van-der-Pol-Oszillators als elektrischer Schwingkreis war bereits vorhanden und so optimiert, dass sein Verhalten gut durch die entsprechenden Differenzialgleichungen reproduziert wurde. Der einzige Nachteil dieser Schaltung bestand darin, dass die Kontrollkräfte nicht beliebig angekoppelt werden konnten. Das lag primär daran, dass nicht beide die Systemdynamik beschreibenden Variablen messtechnisch zugänglich sind, ohne das Systemverhalten grundlegend zu verändern. Näher wird darauf im Kapitel 3.3 eingegangen. Neben diesem Aufbau wurde eine alternative Umsetzung des van-der-Pol-Oszillators ohne Einschränkungen auf die Realisierbarkeit mit diversen Ankopplungen der Kontrollkraft getestet. Beide versprachen zwar eine erfolgreiche Kontrolle, das Kontrollgebiet war jedoch nur für einen sehr engen Parameterbereich zu finden. Außerdem war das Kontrollgebiet verschwindend klein gegenüber dem der bekannten Theorie. Diese Erkenntnis war im Endeffekt ausschlaggebend für die experimentelle Umsetzung des Stuart-Landau-Oszillators, der nach den numerischen Simulationen als erfolgversprechendste Variante erschien.

3.1 Numerische Analyse

Wie im Kapitel 1.1 erläutert, können aus der Linearisierung der Differenzialgleichung um einen periodischen Orbit $\xi(t) = \xi(t + T)$ deren Eigenwerte über einen Floquet-Ansatz bestimmt werden. Im Allgemeinen ist das analytisch nicht möglich, da die explizite Form des periodischen Orbits nicht bekannt ist. An dieser Stelle setzt die numerische Analyse an.

Die Linearisierung der Differenzialgleichung um den periodischen Orbit lautet:

$$\begin{aligned}\delta \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{D}_1 \mathbf{f}(\xi(t), 0) \cdot \delta \mathbf{x}(t) \\ &+ \mathbf{D}_2 \mathbf{f}(\xi(t), 0) \cdot \mathbf{K} \cdot (\delta \mathbf{x}(t) - \delta \mathbf{x}(t - \tau))\end{aligned}\quad (3.1)$$

Im Gegensatz zu Gleichung (1.9) wurde hier verwendet, dass die Kontrollkraft wie bei der Kontrolle torsionsfreier Orbits über die Matrix \mathbf{K} an das System angekoppelt wird. Zur weiteren Analyse wurde im Kapitel 1.1 ein Floquet-Ansatz gewählt. Hier wird der Floquet-Ansatz zwar auch verwendet, er dient jedoch nur zur Eliminierung der Zeitverzögerung. Mit dem Floquet-Multiplikator $\mu_\alpha = \exp((\Lambda_\alpha + i\Omega_\alpha)\tau)$ lässt sich der Term mit Zeitverzögerung auf einen Ausdruck reduzieren, der nur noch von $\delta \mathbf{x}(t)$ abhängt:

$$(\delta \mathbf{x}(t) - \delta \mathbf{x}(t - \tau)) = (1 - \mu_\alpha^{-1}) \delta \mathbf{x}(t) \quad (3.2)$$

Um das Eigenwertproblem numerisch zu lösen, wird auf eine Evolutionsmatrix zurückgegriffen. Die Linearisierung lässt sich wie jede lineare Differenzialgleichung mit Hilfe einer Evolutionsmatrix $\mathbf{U}(t)$ ausdrücken:

$$\delta \mathbf{x}(t) = \mathbf{U}(t) \delta \mathbf{x}(0) \quad \text{mit} \quad \mathbf{U}(0) = \mathbf{1} \quad (3.3)$$

Wird Gleichung (3.3) in die Linearisierung (3.1) eingesetzt und dabei noch die Zeitverzögerung mit Gleichung (3.2) eliminiert, so ergibt sich für die Evolutionsmatrix eine lineare Differenzialgleichung ohne Zeitverzögerung.

$$\dot{\mathbf{U}}_{\mu_\alpha^{-1}}(t) = \left\{ \mathbf{D}_1 \mathbf{f}(\xi(t), 0) + \mathbf{D}_2 \mathbf{f}(\xi(t), 0) \cdot \mathbf{K} \cdot (1 - \mu_\alpha^{-1}) \right\} \mathbf{U}_{\mu_\alpha^{-1}}(t) \quad (3.4)$$

Die Abhängigkeit der Evolutionsmatrix $\mathbf{U}_{\mu_\alpha^{-1}}(t)$ von den Floquet-Multiplikatoren μ_α wird durch den Index explizit hervorgehoben. Der Vorteil der Form ohne Zeitverzögerung ist, dass sie sich numerisch viel leichter behandeln lässt als die mit Zeitverzögerung. Das Lösen von Differenzen-Differenzialgleichungen stellt ein komplexes Gebiet der numerischen Mathematik dar. Mittels der Differenzialgleichung (3.4) kann die Evolutionsmatrix zur Zeit T durch einfaches Iterieren berechnet werden. Ihr Eigenwertproblem

$$\mathbf{U}_{\mu_\alpha^{-1}}(T) \mathbf{p}_\alpha = \mu_\alpha \mathbf{p}_\alpha \quad (3.5)$$

liefert die Floquet-Multiplikatoren μ_α als Eigenwerte mit den dazugehörigen Eigenvektoren \mathbf{p}_α . Die Eliminierung der Zeitverzögerung wird durch eine implizite Abhängigkeit von den Floquet-Multiplikatoren erkaufte. Das zum Eigenwertproblem gehörige komplexwertige charakteristische Polynom lautet¹:

$$P(\mu_\alpha^{-1}) = \det \left(\mathbf{1} - \mu_\alpha^{-1} \mathbf{U}_{\mu_\alpha^{-1}}(T) \right) \stackrel{!}{=} 0 \quad (3.6)$$

Für einen vorgegebenen Wert von μ^{-1} lässt sich die Evolutionsmatrix $\mathbf{U}_{\mu^{-1}}(T)$ numerisch berechnen. Damit kann dann der Wert des charakteristischen Polynoms bestimmt werden. Die Eigenwerte μ_α lassen sich anschließend aus dem charakteristischen Polynom durch eine numerische Nullstellensuche gewinnen. Angesichts der unendlich vielen Eigenwerte muss sehr sorgfältig vorgegangen werden, um die interessanten Eigenwerte zu finden.

Besteht nur Interesse an der Anzahl der instabilen Floquet-Multiplikatoren, so lässt sich ein einfacheres Verfahren anwenden [Bleich u. Socolar, 1996]. Um das Verfahren zu erläutern, lohnt ein Blick auf die komplexe Ebene der Floquet-Multiplikatoren eines Systems unter Kontrolle. Abbildung 3.1 im oberen Teil zeigt die komplexe Ebene für das Beispiel in Abbildung 1.4 (Seite 9) aus dem Kapitel 1.2. Der unkontrollierte instabile Orbit liegt bei $\mu_\alpha = -\exp(1)$ (roter Punkt). Bei stetiger Erhöhung der Kontrollamplitude wandert er auf den Einheitskreis zu (rote Linie), überschreitet ihn (blauer Punkt) und wird stabil (blaue Linie). Gleichzeitig entstehen durch die Kontrolle die unendlich vielen Eigenwerte im Ursprung (gelb). Einer von ihnen ist rein reell und wandert dem Eigenwert des ehemals freien Systems entgegen. Beide reellen Eigenwerte kollidieren miteinander (gelber Punkt) und bilden ein komplex konjugiertes Paar, dass bei einer gewissen Kontrollamplitude den Einheitskreis wieder verlässt (graue Punkte), und der periodische Orbit wird wieder instabil (rote Linie).

Im unteren Teil der Abbildung ist der gleiche Sachverhalt für μ_α^{-1} dargestellt. Es ist gut zu sehen, dass alle instabilen Eigenwerte (rote Linien) innerhalb des Einheitskreises liegen. Dieser Sachverhalt kann zur Bestimmung der Anzahl instabiler Eigenwerte ausgenutzt werden. Das Cauchysche Prinzip des komplexen Arguments², ein bekanntes Theorem aus der komplexen Analysis, besagt, dass die Anzahl der Nullstellen der Funktion $P(\mu^{-1})$, die innerhalb des Einheitskreises liegen ($|\mu^{-1}| < 1$) mit der Windungszahl von $P(\mu^{-1})$ um den Ursprung übereinstimmt, wenn μ^{-1} einen kompletten Umlauf auf dem Einheitskreis vollzieht³. Liegt ein Eigenwert direkt auf dem Einheitskreis und somit auch die Null-

¹ $\det(\mu_\alpha \mathbf{1} - \mathbf{U}_{\mu_\alpha^{-1}}(T)) = \mu_\alpha^n \det(\mathbf{1} - \mu_\alpha^{-1} \mathbf{U}_{\mu_\alpha^{-1}}(T))$

² engl.: *Cauchy's Argument Principle*

³ Unter der Voraussetzung, dass keine Pole innerhalb des Einheitskreises liegen.

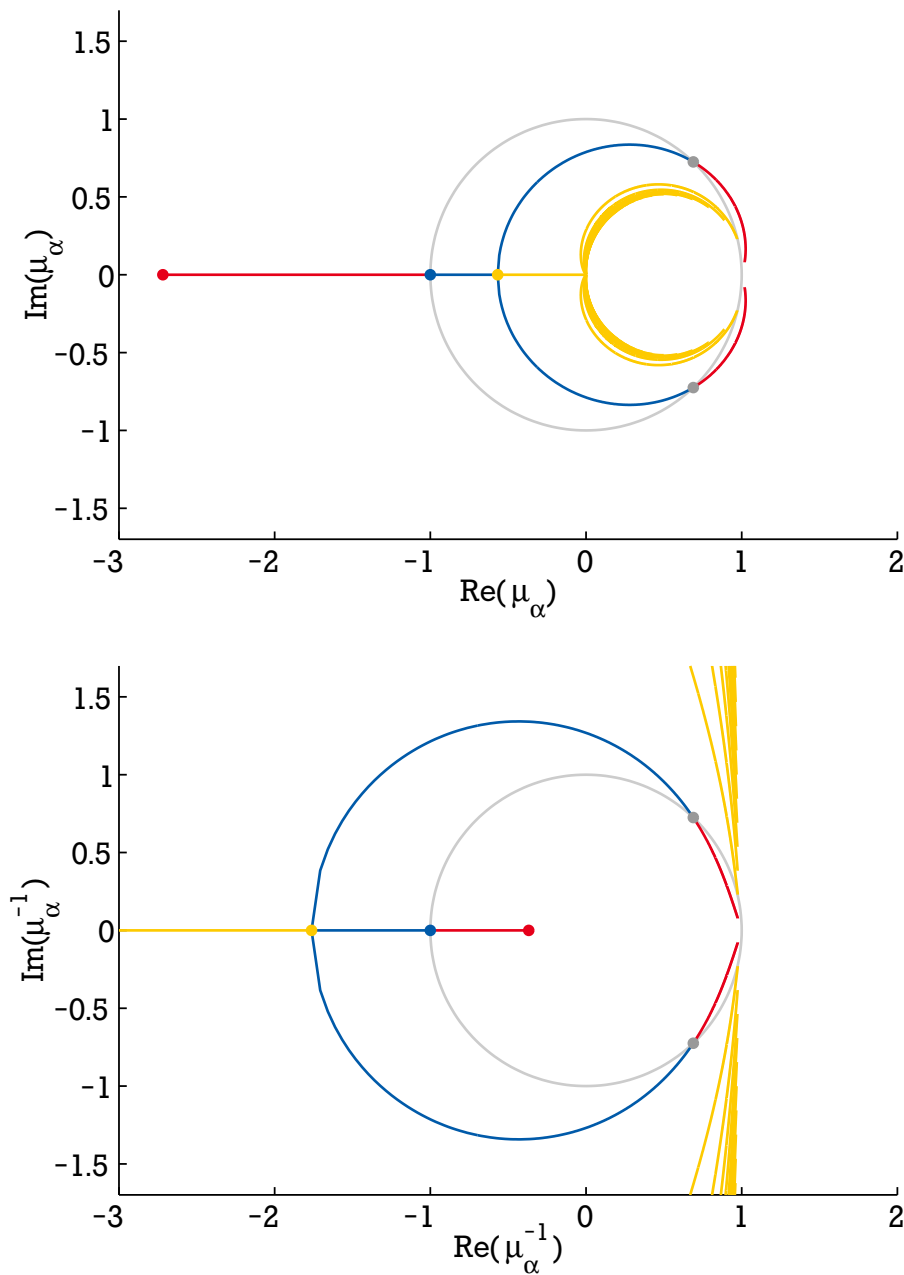


Abbildung 3.1.: **Oben:** Ebene der Floquet-Multiplikatoren eines Systems mit π -Torsion unter Kontrolle. Der unkontrollierte instabile Orbit liegt bei $\mu_\alpha = -\exp(1)$ (roter Punkt). Bei stetiger Erhöhung der Kontrollamplitude wandert er auf den Einheitskreis zu (rote Linie). Derweil entstehen durch die Kontrolle die unendlich vielen Eigenwerte im Ursprung (gelb). Einer von ihnen ist rein reell. Er wandert auf den Eigenwert des ehemals freien Systems zu, der bei einem bestimmten K den Einheitskreis betritt (blauer Punkt). Der periodische Orbit wird stabil (blaue Linie). Beide reellen Eigenwerte kollidieren miteinander (gelber Punkt) und bilden ein komplex konjugiertes Paar, das bei einer gewissen Kontrollamplitude den Einheitskreis wieder verlässt (graue Punkte) und der periodische Orbit wird wieder instabil (rote Linie). **Unten:** Zeigt den gleichen Sachverhalt wie das obere Bild, nur für die inversen Floquet-Multiplikatoren μ_α^{-1} . Alle instabilen Floquet-Multiplikatoren liegen hier innerhalb des Einheitskreises.

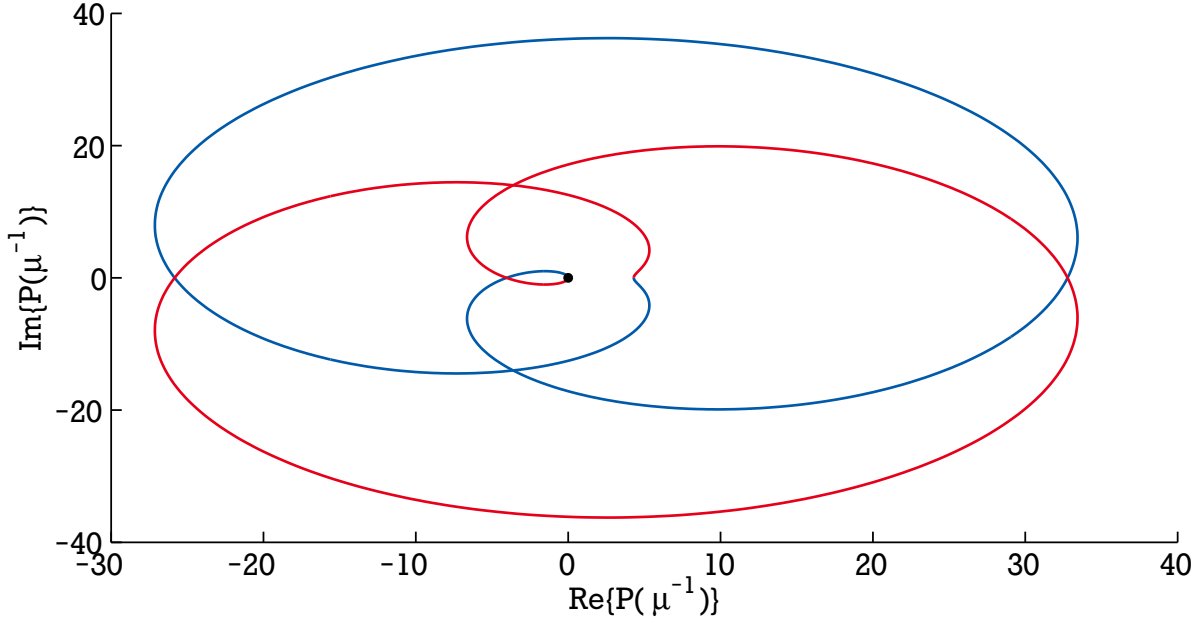


Abbildung 3.2.: Veranschaulichung der Windungszahl \mathcal{N} eines autonomen Systems. Der Ursprung ist durch einen schwarzen Punkt markiert. Das Bild ist symmetrisch zur reellen Achse. Damit dies besser zu erkennen ist, sind die Werte des charakteristischen Polynoms $P(\mu^{-1})$ blau bzw. rot eingefärbt, je nachdem ob μ^{-1} auf der oberen bzw. unteren Hälfte des Einheitskreises liegt. Die Phase von $P(\mu^{-1})$ ändert sich bei einem kompletten Umlauf von μ^{-1} auf dem Einheitskreis um 7π . Demnach hat die Windungszahl abzüglich der Goldstone-Mode den Wert $\mathcal{N} = 3$, und es gibt ebenso viele instabile Floquet-Multiplikatoren für den periodischen Orbit.

stelle des charakteristischen Polynoms, steuert er nur eine halbe Windung zur Windungszahl bei⁴. Bei autonomen Systemen liegt der Eigenwert der Goldstone-Mode $\mu_\alpha = 1$ auf dem Einheitskreis. In Abbildung 3.2 wird die Windungszahl \mathcal{N} eines autonomen Systems veranschaulicht. Der Ursprung ist durch einen schwarzen Punkt markiert. Das Bild ist symmetrisch zur reellen Achse. Die Werte des charakteristischen Polynoms $P(\mu^{-1})$ sind blau bzw. rot eingefärbt, je nachdem ob μ^{-1} auf der oberen bzw. unteren Hälfte des Einheitskreises liegt. Die Phase von $P(\mu^{-1})$ ändert sich bei einem kompletten Umlauf von μ^{-1} auf dem Einheitskreis um 7π . Demnach hat die Windungszahl ohne den Beitrag der Goldstone-Mode den Wert $\mathcal{N} = 3$, und es gibt ebenso viele instabile Floquet-Multiplikatoren für den periodischen Orbit.

⁴ Dass Eigenwerte auf dem Einheitskreis eine halbe Windung zur Windungszahl beisteuern, soll am Eigenwert $\mu_\alpha = 1$ erläutert werden. Ist er Lösung des charakteristischen Polynoms, so kann dieses um ihn entwickelt werden:

$$P(\mu^{-1}) = c_1(1 - \mu^{-1}) + \mathcal{O}((1 - \mu^{-1})^2)$$

Für kleine Änderungen in $\mu^{-1} \approx \exp(i\phi)$ ergibt sich daraus:

$$\begin{aligned} P(\exp(i\phi)) &= c_1(1 - \exp(i\phi)) + \mathcal{O}((1 - \exp(i\phi))^2) \\ &= -c_1 i\phi + \mathcal{O}(\phi^2) \end{aligned}$$

Das heißt, die Phase des charakteristischen Polynoms springt von $-\pi/2$ zu $\pi/2$, wenn ϕ durch die Null läuft.

3.2 Umsetzung der numerischen Analyse

Zur numerischen Analyse wurde die im vorherigen Abschnitt beschriebene Methode zur Bestimmung der Anzahl instabiler Moden in der Programmiersprache C implementiert. Dabei wurde darauf geachtet, die für unterschiedliche Systeme wiederkehrenden Codeteile in Bibliotheken auszulagern. Es gibt im wesentlichen zwei Bibliotheken: Eine von ihnen enthält alle systemspezifischen Teile, wie zum Beispiel die Differenzialgleichung oder deren Linearisierung. Die andere enthält alle Funktionen ohne systemspezifische Besonderheiten. Das umfasst zum Beispiel die Differenzialgleichung der Evolutionsmatrix oder die verwendeten Integrationsalgorithmen. Für jede Bibliothek wurden einheitliche Schnittstellen definiert, was einen modularen Aufbau ermöglichte. Es konnten somit ohne viel Aufwand sowohl das Integrationsverfahren als auch das Differenzialgleichungssystem ausgetauscht werden, indem die Simulationsprogramme mit den unterschiedlichen Bibliotheken verlinkt wurden.

Neben diversen Programmen, die hauptsächlich zum Testen der verschiedenen Bibliotheksfunktionen verwendet wurden, gibt es ein Programm zur numerischen Bestimmung der Anzahl instabiler Moden. Dessen Struktur soll im Folgenden erläutert werden. Dem Programm können verschiedene Parameter übergeben werden. Das sind zum einen Parameter, die die Systemdynamik beschreiben. Für den Stuart-Landau-Oszillator sind das der Bifurkationsparameter λ , die nichtlineare Frequenzverstimmung γ und ein Parameter, der den super- oder subkritischen Charakter der Bifurkation angibt. Zum anderen nimmt das Programm die Parameter der Kontrolle an. Neben der Kontrollmatrix mit vier unabhängigen Elementen ist das der Reflexionsparameter R der erweiterten zeitverzögerten Rückkopplungskontrolle, die in Kapitel 1 erwähnt wurde.

Im ersten Schritt berechnet das Programm numerisch die Periodendauer und einen Umlauf des Pyragas-Orbits für die gegebenen Systemparameter. Dabei werden analytische Näherungen verwendet, um die Rechenzeit drastisch zu verkürzen. Im zweiten Schritt wird die Differenzialgleichung der Evolutionsmatrix (3.4) entlang des Pyragas-Orbits für eine Kontrollmatrix und einen Reflexionsparameter sowie unterschiedliche μ_α^{-1} iteriert. Dabei wird zu jedem μ_α^{-1} , das einen kompletten Umlauf auf dem Einheitskreis vollführt, die Evolutionsmatrix nach einem Umlauf ausgewertet. Aus den Werten der Evolutionsmatrix nach einem Umlauf und den zugehörigen μ_α^{-1} kann dann das charakteristische Polynom (3.6) bestimmt werden. Ist das System autonom, hat das charakteristische Polynom einen Nulldurchgang für die Goldstone-Mode. Wegen der numerischen Genauigkeit liefert die Berechnung des charakteristischen Polynoms an der Stelle $\mu_\alpha^{-1} = 0$ einen endlichen Wert. Um Probleme bei der Berechnung der Windungszahl \mathcal{N} zu vermeiden, werden alle Werte des charakteristischen Polynoms um diese numerisch bedingte Abweichung korrigiert. Im dritten und letzten Schritt werden die komplexen Werte des charakteristischen Polynoms in Amplitude und Phase zerlegt. Das Integral über die Phasen für einen Umlauf von μ_α^{-1} auf dem Einheitskreis liefert ein ganzzahliges Vielfaches der Zahl π . Für autonome Systeme ist es im Allgemeinen ein ungeradzahliges Vielfaches. Nach Abzug des Beitrags der Goldstone-Mode und Division durch 2π ergibt sich die Windungszahl \mathcal{N} , die der Anzahl der instabilen Moden entspricht. Das Programm gibt nach einer Plausibilitätsüberprüfung diese Windungszahl aus.

Um Parameterscans für verschiedene Kontrollmatrizen und Reflexionsparameter durchzuführen, werden der zweite und dritte Schritt für die entsprechenden Werte durchgeführt. So kann Rechenzeit gespart werden, da weder die Periodendauer noch der Umlauf des Pyragas-Orbits neu berechnet werden müssen.

Es wurden verschiedene Integrationsverfahren getestet, darunter sowohl solche mit fester Schrittweite als auch adaptive. Neben selbst implementierten Verfahren, wie zum Beispiel Euler implizit und explizit, Heun oder Runge-Kutta, kamen auch Verfahren der GNU Scientific Library (GSL) zum Einsatz. Das beste Verhältnis zwischen Geschwindigkeit und Genauigkeit lieferte das Heun-Verfahren mit fester Schrittweite. Alle im Folgenden präsentierten Ergebnisse wurden daher mit diesem Verfahren berechnet.

3.3 Simulation des van-der-Pol-Oszillators

Der van-der-Pol-Oszillator ist ein bekanntes Beispiel eines nichtlinearen autonomen Systems und damit eines der Standardbeispiele zahlreicher Lehrbücher. Es handelt sich dabei um einen Schwingkreis mit nichtlinearer Dämpfung. Für große Amplituden überwiegt der dissipative Einfluss. Für kleine Amplituden wird dem System Energie zugeführt. Solche Systeme besitzen typischerweise einen Grenzzyklus, bei dem sich beide Eigenschaften der Nichtlinearität die Waage halten. Ein solches System wurde von van der Pol bereits 1927 am Beispiel eines elektrischen Schwingkreises mit einer Triode vorgestellt. Seither wurde eine Vielzahl von unterschiedlichsten Systemen beschrieben, die das gleiche Verhalten zeigen. Allen gemein ist, dass der periodische Orbit neben der Goldstone-Mode nur einen Freiheitsgrad besitzt.

Für diese Arbeit ist nur der Fall interessant, dass der auftretende periodische Orbit instabil ist. Die Differenzialgleichung

$$\dot{x} = -y \quad (3.7a)$$

$$\dot{y} = x + (2\epsilon + x^2)y \quad (3.7b)$$

beschreibt genau diesen Fall. Die Differenzialgleichung besitzt einen trivialen Fixpunkt als Lösung. Für positive Werte von ϵ ist dieser Fixpunkt instabil, für negative stabil. Bei Veränderung des Bifurkationsparameters ϵ tritt eine Hopf-Bifurkation bei $\epsilon = 0$ auf. Der dabei entstehende instabile periodische Orbit existiert nur für negative Werte von ϵ .

Um Genaueres über die Hopf-Bifurkation zu erfahren, muss eine Normalformanalyse durchgeführt werden: Eine Linearisierung um den trivialen Fixpunkt ergibt die zwei komplex konjugierten Eigenwerte $\lambda = \epsilon + i\sqrt{1 - \epsilon^2}$ und $\bar{\lambda}$. Die zugehörigen Rechtseigenvektoren sind $\mathbf{v} = (-1, \lambda)^T$ und $\bar{\mathbf{v}}$, die Linkseigenvektoren entsprechend $\mathbf{w} = (\bar{\lambda}, 1)/(\lambda - \bar{\lambda})$ und $\bar{\mathbf{w}}$.

Die Differenzialgleichung des van-der-Pol-Oszillators (3.7) kann auch in der Form

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2\epsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \mathcal{C} : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

geschrieben werden, wobei der nichtlineare Anteil der Differenzialgleichung durch die trilineare Form

$$\mathcal{C} : \mathbf{a} : \mathbf{b} : \mathbf{c} := \frac{1}{3} \left[a_1 b_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \text{zyklisch vertauschte} \right] \quad (3.9)$$

ausgedrückt wurde. Um den van-der-Pol-Oszillator mit dem Stuart-Landau-Oszillator zu vergleichen, muss er mittels Normalformanalyse auf die Hopf-Normalform

$$\dot{z} = (\lambda' + i)z + c|z|^2 z \quad (3.10)$$

gebracht werden, wobei durch eine Zeitrenormierung der Parameter $\lambda' = \epsilon/\sqrt{1 - \epsilon^2}$ eingeführt wurde. λ' entspricht dem Parameter λ der Hopf-Normalform aus Kapitel 2.2. Für die Normalformanalyse wird eine Transformation in die Zentralmannigfaltigkeit $(x \ y)^T = z\mathbf{v} + \bar{z}\bar{\mathbf{v}}$ unter Vernachlässigung höherer Ordnungen verwendet und die Differenzialgleichung von links mit \mathbf{w} multipliziert. Durch eine weitere Transformation können die nicht-resonanten kubischen Beiträge eliminiert werden, so dass sich der kubische Vorfaktor zu

$$c = 6 \mathbf{w} \mathcal{C} : \mathbf{v} : \mathbf{v} : \bar{\mathbf{v}} = 1 + i \cdot (-3\lambda') \quad (3.11)$$

ergibt. Da der Realteil $\Re(c)$ positiv ist, handelt es sich tatsächlich um eine subkritische Hopf-Bifurkation. Der Imaginärteil $\Im(c)$ ist für den periodischen Orbit ebenfalls positiv und wächst linear mit dem Abstand zum Bifurkationspunkt. Es scheint zunächst so, als ob der Imaginärteil $\Im(c)$ mit der nichtlinearen Frequenzverstimmung γ in Zusammenhang gebracht werden könnte. Das ist in gewisser Weise auch

möglich, solange der Hopf-Normalform keine quantitativen Vorhersagen abverlangt werden. Eine einfache Überlegung zeigt, dass die nächsthöhere Ordnung in z berücksichtigt werden müsste. Wie im Kapitel 2.2 ausgeführt, hat der periodische Orbit der Hopf-Normalform einen Radius $|z| = \sqrt{-\lambda'}$. Im Gegensatz zum Anteil $(\lambda' + i)z + |z|^2 z$, der von der Ordnung $\mathcal{O}(\lambda'^{(3/2)})$ ist, ist der Term der nichtlinearen Frequenzverstimmung $\lambda'|z|^2 z$ von der Ordnung $\mathcal{O}(\lambda'^{(5/2)})$, wie der vernachlässigte Term $|z|^4 z$. Dennoch gibt der Imaginärteil $\Im(c)$ einen Hinweis darauf, dass eine nicht-verschwindende nichtlineare Frequenzverstimmung vorhanden ist, wie in Kapitel 2.1 gefordert.

3.3.1 Zweidimensionale Kopplung an eine Komponente

Für die geplanten experimentellen Untersuchungen existierte bereits ein elektrischer Schwingkreis, der den idealisierten Differenzialgleichungen des van-der-Pol-Oszillators sehr gut entspricht [von Loewenich u. a., 2010]. Da sehr viel Arbeit in die Optimierung dieser elektronischen Schaltung geflossen war, war das Interesse groß, diesen Schwingkreis auf für die Kontrolle torsionsfreier Orbits zu verwenden. Wie im Anhang A.1 erläutert, hat die Differenzialgleichung inklusive Kontrollterm die Form:

$$\dot{x} = -y \quad (3.12a)$$

$$\dot{y} = x + (2\epsilon + x^2)y - K_{yx}(x - x_\tau) - K_{yy}(y - y_\tau) \quad (3.12b)$$

Der interessante Parameterraum ist hier dreidimensional (ϵ , K_{yx} und K_{yy}). Für die Simulationen wurden verschiedene ϵ -Werte im Bereich $\epsilon \in [-0,5; 0)$ gewählt, für die jeweils die K_{yx} - K_{yy} -Ebene untersucht wurde. Im ersten Schritt wurde ein grobes Raster verwendet, das zur Orientierung diente. So konnten am Verlauf der Bifurkationslinien die Bereiche ausfindig gemacht werden, in denen das Kontrollgebiet zu erwarten wäre. Im zweiten Schritt wurde für diesen Bereich eine feinere Auflösung in K_{yx} und K_{yy} gewählt. Der zweite Schritt wurde so oft wiederholt, bis der Ausschnitt der K_{yx} - K_{yy} -Ebene die wesentlichen Informationen enthielt.

Im oberen Teil der Abbildung 3.3 ist ein repräsentativer Ausschnitt der K_{yx} - K_{yy} -Ebene zu sehen. Die Windungszahl N ist farblich kodiert. Ändert sich die Windungszahl, so liegt eine Bifurkation vor. Bei einer Änderung um $\Delta N = \pm 1$ tritt eine transkritische Bifurkation auf (schwarze Linie). Je nachdem, ob sich die Windungszahl von links nach rechts erhöht oder verringert, ist die Linie durchgezogen oder gestrichelt. Ändert sich die Windungszahl hingegen um $\Delta N = \pm 2$, ist eine Hopf-Bifurkation dafür verantwortlich. Wenn die Hopf-Bifurkationslinie die transkritische Bifurkationslinie kreuzt, kann unterhalb der transkritischen Bifurkationslinie ein Kontrollbereich auftreten. Interessant ist, dass die transkritische Bifurkationslinie wie bei der Hopf-Normalform eine Gerade ist. Es konnte gezeigt werden, dass es sich um eine Gerade handeln muss [Just, 2009]. Voraussetzungen sind nur, dass es zwei Kontrollamplituden gibt und eine Goldstone-Mode vorliegt. Näher wird darauf im Anhang B.2 eingegangen.

Für sehr kleine ϵ -Werte sind Kontrollintervalle zu finden, wie im unteren Teil der Abbildung 3.3 zu sehen. Das Kontrollgebiet verschwindet zwischen $\epsilon = -0,004$ und $\epsilon = -0,003$. Je dichter ϵ am Bifurkationspunkt $\epsilon = 0$ liegt, umso größer wird das Kontrollintervall. Dass Kontrolle überhaupt möglich ist, überrascht zunächst, da es sich bei der Ankopplung nicht um eine Drehmatrix handelt, wie sie in der anschaulichen Erklärung der zeitverzögerten Rückkopplungskontrolle torsionsfreier Orbits in Kapitel 2 vorgeschlagen wurde. Andererseits ist die Kopplung in Form einer Drehmatrix nicht zwingend, sondern nur ein Beispiel, das sich gut analytisch behandeln lässt. Die Argumente der anschaulichen Erklärung in Kapitel 2.1 gelten auch für die hier verwendete Kopplung. Aus experimenteller Sicht haben diese kleinen Kontrollgebiete aus mehreren Gründen keine Relevanz. Zum einen treten sie nur bei sehr kleinen Bifurkationsparametern auf. Das hat zur Folge, dass der elektronische Schwingkreis mit sehr kleinen Amplituden oszilliert und somit das omnipräsente Rauschen der elektronischen Bauteile deutlichen Einfluss auf die Systemdynamik nimmt. Zum anderen beschreibt die Differenzialgleichung nur näherungsweise die tatsächliche Systemdynamik. Es ist also nicht auszuschließen, dass in den Simulationen ein Kontrollgebiet zu finden ist, das aber im Experiment gar nicht auftritt. Je größer das Kontrollintervall ist, desto größer ist die Chance, dieses Kontrollintervall auch experimentell nachzuweisen.

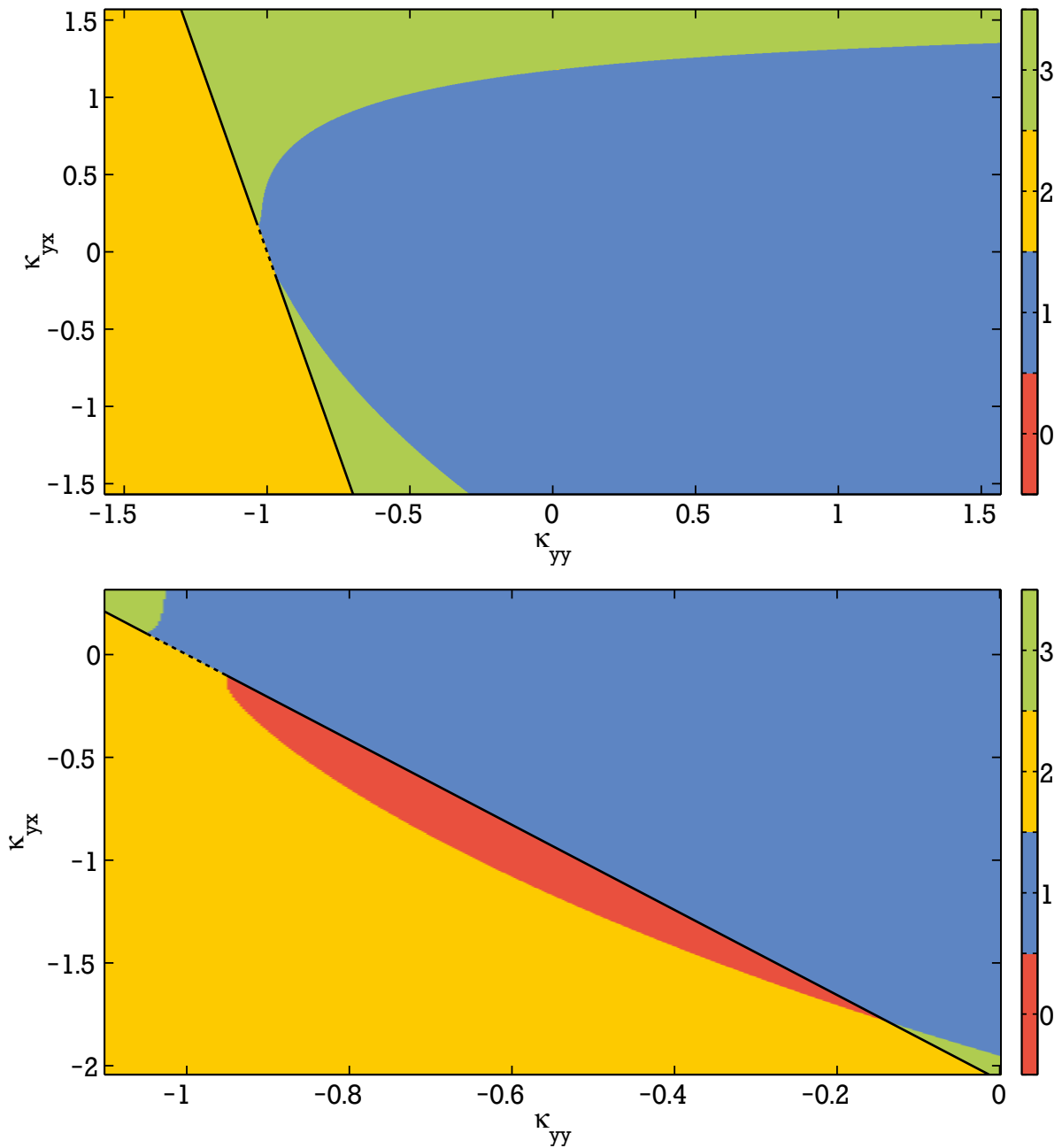


Abbildung 3.3.: κ_{yy} - κ_{yx} -Ebene des van-der-Pol-Oszillators mit zweidimensionaler Kopplung an eine Komponente. Die Windungszahl \mathcal{N} ist farblich kodiert. $\Delta \mathcal{N} = \pm 1$: transkritische Bifurkation (schwarze Linie). $\Delta \mathcal{N} = \pm 2$: Hopf-Bifurkation. **Oben:** Es gibt kein Gebiet, in dem die Kontrolle erfolgreich ist ($\epsilon = -0.005$). **Unten:** Es gibt ein kleines Gebiet (rote Fläche), in dem der Pyragas-Orbit stabilisiert wird ($\epsilon = -0.002$).

Es wurden auch Simulationen für verschiedene Werte des Reflexionsparameters R durchgeführt. Erstaunlich war, dass im Gegensatz zur konventionellen zeitverzögerten Rückkopplungskontrolle keine Vergrößerung des Kontrollgebiets beobachtet werden konnte.

3.3.2 Drehmatrix-Kopplung

Neben der im vorherigen Abschnitt vorgestellten Ankopplung wurden auch weitere getestet, die jedoch keine grundsätzlich anderen Ergebnisse geliefert haben. Auf eine soll hier explizit eingegangen werden, und zwar auf die Ankopplung mittels einer Drehmatrix. Die zugehörige Differenzialgleichung nimmt dann die Form

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & (2\epsilon + x^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} K_x & -K_y \\ K_y & K_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_\tau \\ y - y_\tau \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

an. Wie zu Beginn des Kapitels erläutert, lässt sich der van-der-Pol-Oszillator mittels Normalformanalyse in den Stuart-Landau-Oszillator überführen. Bei ϵ -Werten, die vom Betrag her klein sind, sollte die Normalform eine gute Näherung sein. Es kann deswegen angenommen werden, dass die Vorhersagen der Bifurkationslinien für die Hopf-Normalform aus Kapitel 2.2 auch in gewissen Grenzen für den van-der-Pol-Oszillator zutreffend sind.

Die Simulationen wurden, wie im vorherigen Abschnitt beschrieben, durchgeführt. Dabei fiel auf, dass die nichtlineare Frequenzverstimmung γ aus der Normalformanalyse nicht mit den Simulationen in Verbindung gebracht werden konnte. In der Tat stellt die Definition der nichtlinearen Frequenzverstimmung ein grundsätzliches Problem dar, sobald Systeme betrachtet werden, die nicht exakt der Normalform entsprechen. Diese zunächst einfach wirkende Fragestellung ist Gegenstand aktueller Forschung. Um dennoch einen Vergleich mit der kontrollierten Hopf-Normalform zu erhalten, wurde angenommen, dass sich γ aus der Steigung der transkritischen Bifurkationslinie bestimmen lässt. Es sei explizit darauf hingewiesen, dass dies ein heuristischer Ansatz ist, der sich nur zum Teil begründen lässt. Dennoch liefert er recht gute Ergebnisse. Näher wird darauf im Anhang B.2 eingegangen.

Abbildung 3.4 zeigt Simulationsergebnisse für einen ϵ -Wert, bei dem Kontrolle möglich ist. Die Windungszahl \mathcal{N} ist wie zuvor farblich kodiert. Bei einer Änderung um $\Delta\mathcal{N} = \pm 1$ tritt eine transkritische Bifurkation auf, bei $\Delta\mathcal{N} = \pm 2$ eine Hopf-Bifurkation. Neben den Simulationsdaten sind auch die Bifurkationslinien eingezeichnet, wie sie für die Hopf-Normalform zu erwarten sind. Das Kontrollgebiet liegt in dem Bereich, in dem die Hopf-Bifurkationslinie unterhalb der transkritischen-Bifurkationslinie verläuft. Obwohl die nichtlineare Frequenzverstimmung γ über den heuristischen Ansatz aus Anhang B.2 bestimmt wurde, liegen die Bifurkationslinien der Simulation des van-der-Pol-Oszillators und der analytischen Rechnung für die Hopf-Normalform nah beieinander. Erst eine Vergrößerung zeigt Diskrepanzen (Abb. 3.4 unten). Es fällt auf, dass das Kontrollgebiet deutlich kleiner ist, als es bei der Hopf-Normalform wäre. Die Lage hingegen wird zumindest qualitativ wiedergegeben. Je größer ϵ ist, umso stärker sind die Abweichungen zwischen der Simulation und der Vorhersage für die Hopf-Normalform, die immer mehr ihre Gültigkeit verliert.

Werden die Simulationsergebnisse mit denen der zuvor behandelten Ankopplung verglichen, zeigt sich, dass die Kontrollgebiete bei der Drehmatrix-Ankopplung größer sind. Dementsprechend verschwindet das Kontrollgebiet bei etwas größeren Werten von ϵ . Dennoch bleiben die Probleme einer experimentellen Umsetzung bestehen, wie zum Beispiel die Anfälligkeit auf Rauschen und die geringe Größe der Kontrollintervalle.

3.4 Stuart-Landau-Oszillator mit Drehmatrix-Kopplung

Der Stuart-Landau-Oszillator ist ein Schwingkreis, der der Hopf-Normalform entspricht. In anderen Fachbereichen, wie zum Beispiel der Chemie oder der Strömungsmechanik, wird die Hopf-Normalform auch

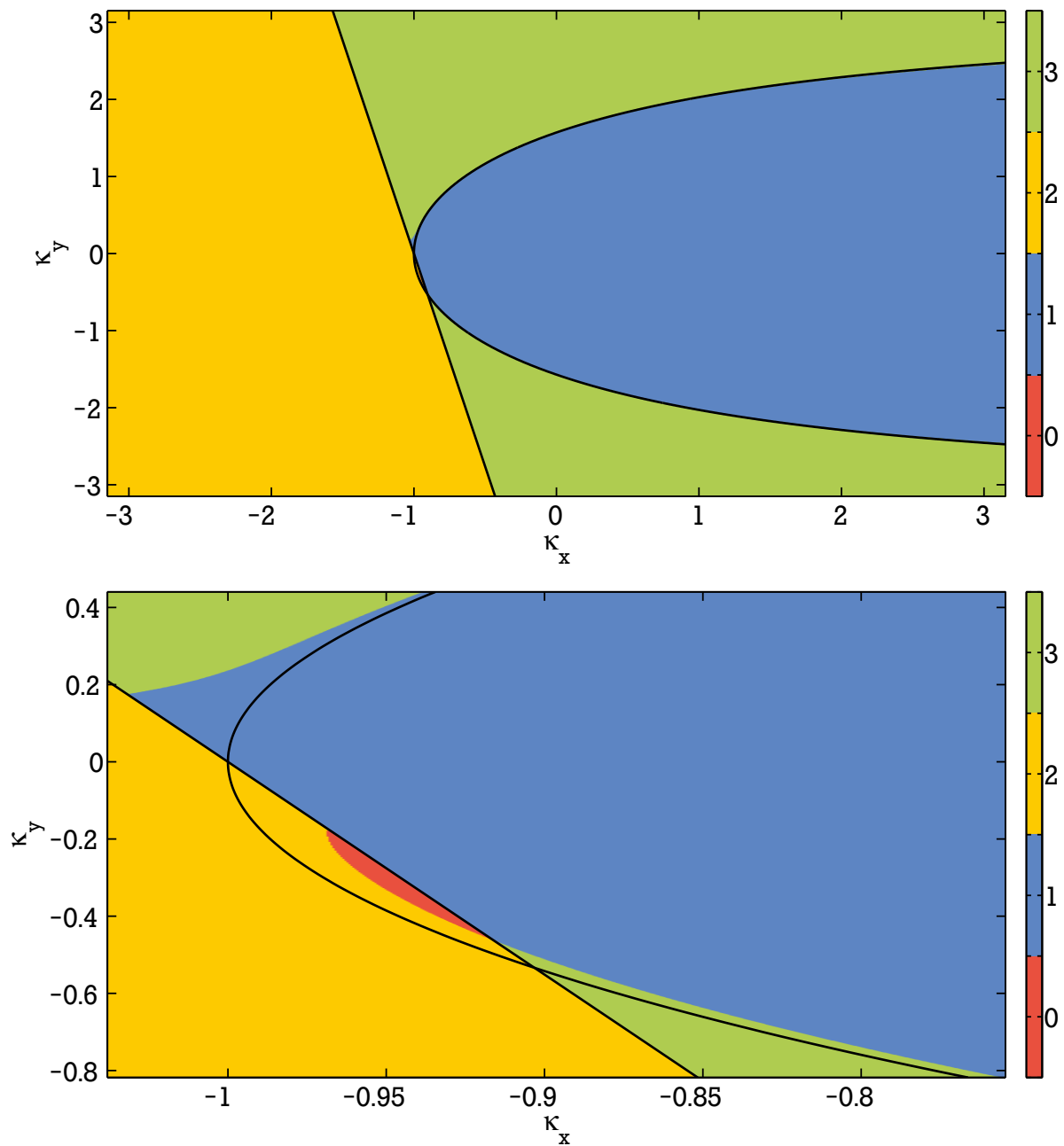


Abbildung 3.4.: κ_{yy} - κ_{yx} -Ebene des van-der-Pol-Oszillators mit Drehmatrix-Ankopplung. Die Windungszahl \mathcal{N} ist farblich kodiert. An den Übergängen treten verschiedene Bifurkationen auf. $\Delta\mathcal{N} = \pm 1$: transkritische Bifurkation. $\Delta\mathcal{N} = \pm 2$: Hopf-Bifurkation. Es gibt ein kleines Gebiet, in dem die Kontrolle erfolgreich ist (rote Fläche). Die Bifurkationslinien für die Hopf-Normalform sind schwarz eingezeichnet. Der untere Teil der Abbildung zeigt einen Ausschnitt des oberen. ($\epsilon = -0.005$)

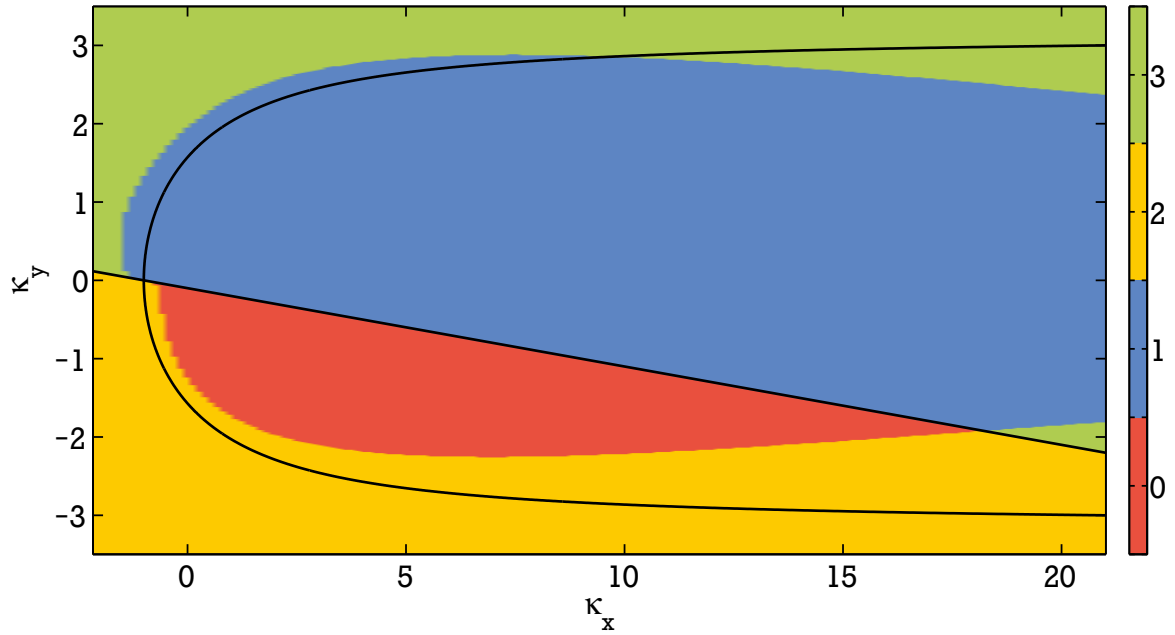


Abbildung 3.5.: κ_x - κ_y -Ebene des Stuart-Landau-Oszillators. Die Windungszahl \mathcal{N} ist farblich kodiert. $\Delta\mathcal{N} = \pm 1$: transkritische Bifurkation. $\Delta\mathcal{N} = \pm 2$: Hopf-Bifurkation. Es gibt ein großes Kontrollgebiet (rote Fläche). Die analytisch berechneten Bifurkationslinien sind schwarz eingezeichnet. Das Kontrollgebiet ist deutlich kleiner als vorhergesagt. ($\lambda = -0.01$; $\gamma = 10$)

als Stuart-Landau-Gleichung bezeichnet. Die Bezeichnung „Stuart-Landau-Oszillator“ wurde in dieser Arbeit zur Abgrenzung der experimentellen Umsetzung von den theoretischen Überlegungen gewählt.

Ursprünglich wurde der Stuart-Landau-Oszillator zum Testen der numerischen Verfahren implementiert. Nach den Erkenntnissen aus den Simulationen des van-der-Pol-Oszillators rückte er ins Zentrum des Interesses. Anhand der Simulationen sollten weniger die Größe des Kontrollgebiets überprüft werden, da die theoretischen Vorhersagen als weitgehend verlässlich eingestuft wurden. Vielmehr bestand das Interesse darin, experimentelle Unzulänglichkeiten und deren Wirkung auf das Kontrollgebiet einzuschätzen. Aus experimenteller Sicht stellt die hohe Symmetrie der Differentialgleichung des Stuart-Landau-Oszillators

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (x^2 + y^2) \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -\gamma \\ \gamma & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{B}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} K_x & -K_y \\ K_y & K_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_\tau \\ y - y_\tau \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

ein Problem dar. Es wurden Asymmetrien der Matrizen \mathbf{A} und \mathbf{B} bezüglich ihrer Diagonalen und Nebendiagonalen numerisch untersucht. Um den Parameterraum überschaubar zu halten, wurden die Asymmetrien getrennt voneinander betrachtet. Die Einflüsse der Kontrollmatrix wurden nicht näher analysiert, da die Simulationen des van-der-Pol-Oszillators gezeigt haben, dass selbst massive Veränderungen der Matrix zu erfolgreicher Kontrolle führen.

Das erfreuliche Ergebnis dieser numerischen Untersuchungen war, dass Asymmetrien in den Matrizen \mathbf{A} und \mathbf{B} das Kontrollgebiet zwar verkleinern, aber nicht verschwinden lassen. Der Einfluss ist für Asymmetrien im zweistelligen Prozentbereich zwar merklich, dürfte aber die experimentelle Realisierbarkeit jedoch nicht grundsätzlich einschränken. Bei kleineren Asymmetrien ist die Verkleinerung des Kontrollintervalls vernachlässigbar.

In Abbildung 3.5 ist die κ_x - κ_y -Ebene des Stuart-Landau-Oszillators ohne Asymmetrien zu sehen. Der Verlauf der Bifurkationslinien, wie sie für die Hopf-Normalform vorhergesagt wurden, ist zum Vergleich ebenfalls dargestellt. Der Verlauf der transkritischen Bifurkation wird sehr gut wiedergegeben.

Die Hopf-Bifurkationslinie des Stuart-Landau-Oszillators entspricht nur qualitativ der Vorhersage der Hopf-Normalform. Das Kontrollgebiet fällt kleiner aus, als es die Theorie erwarten lässt. Insbesondere der Versatz der Punkte, an denen die Hopf-Bifurkationslinie auf die transkritische Bifurkation trifft, ist auffällig. Dieser Versatz wurde auch bei den Simulationen des van-der-Pol-Oszillators gefunden, dort aber als systemspezifische Eigenschaft eingestuft. Um numerische Unzulänglichkeiten der eigenen Programme auszuschließen, wurde das System für die gleichen Parameter wie in Abbildung 3.5 mit dem `dde-biftool` analysiert [Engelborghs u. a., 2002]. Es wurden dieselben numerischen Ergebnisse gefunden wie gezeigt.

3.5 Zusammenfassung der numerischen Ergebnisse

Die numerischen Untersuchungen haben gezeigt, dass der van-der-Pol-Oszillator mit unterschiedlichen Ankopplungen der Kontrollkräfte kontrolliert werden kann. Allen Ankopplungen war gemein, dass, wenn Kontrolle möglich war, die Kontrollgebiete nur für Bifurkationsparameter ϵ sehr nahe am Bifurkationspunkts gefunden werden konnten. Darüber hinaus waren die Kontrollgebiete sehr klein. Die experimentelle Umsetzung wurde als schwierig, eventuell sogar als unmöglich eingeschätzt.

Der Stuart-Landau-Oszillator erscheint im Rahmen der numerischen Erkenntnisse als experimentell gut realisierbar. Zwar gibt es zwischen der Numerik und den Vorhersagen der Hopf-Normalform Diskrepanzen bei der Größe des Kontrollgebiets, diese wurden jedoch als weniger problematisch für die experimentelle Realisierung angesehen. Die Einflüsse der untersuchten Asymmetrien in der Differenzialgleichung waren gegen diese Diskrepanz vernachlässigbar klein. Daher entschied ich mich, den Stuart-Landau-Oszillator für die Kontrollexperimente zu verwenden.

4 Experiment

4.1 Experimenteller Aufbau

Nachdem sich der Stuart-Landau-Oszillator in den Simulationen als das aussichtsreichere System zur experimentellen Realisierung der zeitverzögerten Rückkopplungskontrolle an torsionsfreien Orbits erwiesen hatte, wurde ein geeigneter elektronischer Schaltkreis entwickelt. Zunächst wurde eine Umsetzung mittels zweier gekoppelter LCR-Schwingkreise erwogen. Das ist zwar möglich, bringt aber in der Praxis eine Reihe von Problemen mit sich, die die Wirksamkeit der Kontrolle massiv beeinträchtigen können. Als Alternative bot sich die Möglichkeit an, die rechte Seite der Differenzialgleichung des Stuart-Landau-Oszillators

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (x^2 + y^2) \begin{pmatrix} 1 & -\gamma \\ \gamma & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{(a)} - \underbrace{\begin{pmatrix} K_x & -K_y \\ K_y & K_x \end{pmatrix}}_{(b)} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x - x_\tau \\ y - y_\tau \end{pmatrix}}_{(c)} \quad (4.1)$$

in eine elektronische Schaltung umzusetzen und diese mittels aktiver Schaltungen zu integrieren. Der gesamte Schwingkreis gibt die Eigenschaften des Modells sehr präzise wieder und zeigt aber zugleich typische experimentelle Eigenschaften, wie Rauscheinflüsse, Bauteilungenauigkeiten und thermische Drift der Systemparameter sowie parasitäre Eigenschaften der Bauelemente. Eine erfolgreiche Realisierung des Kontrollschemas in einer derartigen elektronischen Implementierung erlaubt daher wesentlich zuverlässigere Aussagen über Effizienz, Robustheit und Ausdehnung des Kontrollgebiets als eine numerische Simulation.

Der gesamte elektronische Aufbau wurde aus vier Modulen aufgebaut: (a) dem unkontrollierten Stuart-Landau-Oszillator, (b) einer Schaltung für die Drehmatrix-Ankopplung, (c) zwei Zeitverzögerungen und (d) einer Steuerschaltung, die das Zusammenspiel der verschiedenen Teile koordiniert.

4.1.1 Stuart-Landau-Oszillator ohne Kontrolle

Die Schaltung wurde als eine direkte Umsetzung der Differenzialgleichung (4.1) konzipiert. In Abbildung 4.1 ist ein schematischer Aufbau dargestellt. Der grau eingerahmte Teil entspricht der rechten Seite der Gleichung (4.1). Aus den Spannungen, die die Variablen x (blau) und y (rot) repräsentieren, werden durch Verstärker-, Multiplizierer- und Addiererschaltungen die Spannungen erzeugt, die \dot{x} und \dot{y} entsprechen (grauer Kasten). Durch Integration ergeben sich daraus die Variablen x und y , die wiederum die Eingangswerte sind. So ergibt sich ein geschlossener elektrischer Kreis – der Schwingkreis. Zu Beginn des Experimentes können durch die Gleichspannungen x_0 und y_0 die Anfangswerte der Integration gesetzt werden. Aus den Widerstandswerten der exakten elektronischen Schaltung können die verschiedenen Parameter der Hopf-Normalform berechnet werden. Für λ und γ ergeben sich die Werte (vgl. Anhang A.2):

$$\lambda \approx -1.02 \quad (4.2a)$$

$$\gamma \approx 10.0 \quad (4.2b)$$

Bei der experimentellen Umsetzung wurden nur passive Bauelemente verwendet, wie zum Beispiel Widerstände oder Kondensatoren, die um maximal 1% von ihrem Nennwert abweichen. Dadurch sollte garantiert sein, dass der Schwingkreis nicht zu sehr von der angestrebten symmetrischen Form abweicht.

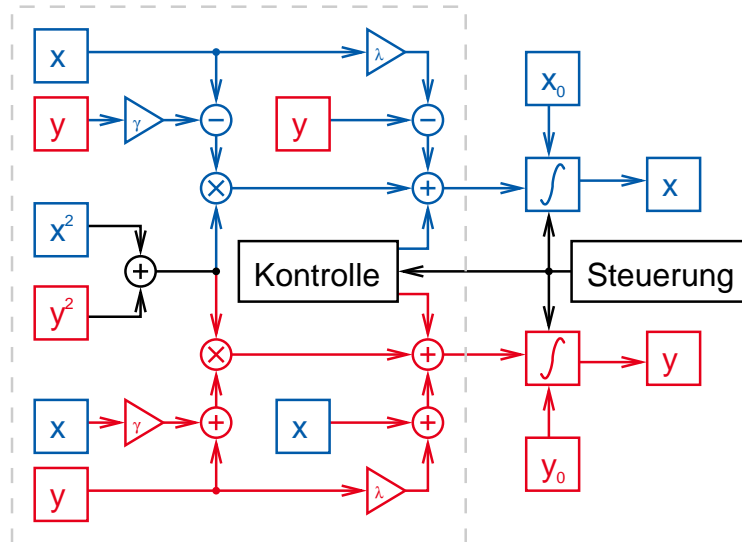


Abbildung 4.1.: Schematische Darstellung des Stuart-Landau-Oszillators. Grauer Kasten: Rechte Seite der Gleichung (4.1). Blau: x -Komponente. Rot: y -Komponente. Schwarz: ohne direkte Zuordnung. Die Kontrollschaltung ist in Abb. 4.3 dargestellt.

Verschiedene Abgleichmöglichkeiten erwiesen sich als kontraproduktiv. Die einzigen Korrekturmöglichkeiten, die in den experimentellen Aufbau eingeflossen sind, sind Gleichspannungsabgleiche der Operationsverstärker und der Multiplikatoren. Versuche, weitere Parameter anzupassen, erwiesen sich als problematisch. So hat zum Beispiel der Abgleich von Widerständen durch die induktiven Eigenschaften der verwendeten Potenziometer das Systemverhalten maßgeblich gestört.

Systemeigenschaften

Der Stuart-Landau-Oszillator wurde so konzipiert, dass es leicht möglich war, zwischen einer subkritischen und einer superkritischen Hopf-Bifurkation zu wechseln. Dabei wurde nur die Stabilität des periodischen Orbits ausgetauscht, nicht aber der Wert des Bifurkationsparameters λ verändert. So konnte der Schwingkreis auf seine Eigenschaften untersucht und die entsprechenden Korrekturen der aktiven Bauelemente justiert werden. Bei den Eigenschaften stand die Aussteuerung der aktiven Bauteile im Vordergrund. Zu kleine Signale sind rauschanfällig. Insbesondere Multiplikatoren besitzen eine Neigung zum Verrauschen der Signale. Zu große Signale werden beschnitten, wenn sie in den Bereich der Sättigungsspannung der aktiven Elemente geraten. Bei der Planung wurde das bereits berücksichtigt. Aus den Schaltungsdetails wurden die Amplitude R_p der Oszillationen und deren Frequenz ν bestimmt:

$$R_p \approx 2,9 \text{ V} \quad (4.3a)$$

$$\nu \approx 1,82 \text{ kHz} \quad (4.3b)$$

In Abbildung 4.2 ist eine am elektronischen Schwingkreis gemessene Zeitreihe beider Komponenten dargestellt. Es handelt sich dabei um den Stuart-Landau-Oszillator mit einem stabilen Orbit. Als Erstes fällt auf, dass die y -Komponente eine größere Amplitude besitzt als die x -Komponente. Bestimmt man die Frequenz der Oszillationen und die Amplitude der x -Komponente, ergeben sich die Werte:

$$R_{exp} \approx 1,2 \text{ V} \quad (4.4a)$$

$$\nu_{exp} \approx 970 \text{ Hz} \quad (4.4b)$$

Beide weichen massiv von den zuvor berechneten Werten ab. Diese Abweichung ist erstaunlich und kann nicht allein durch Bauteilungenauigkeiten begründet werden. Auch Fehler beim Aufbau des Schwingkreises und bei der Berechnung wurden ausgeschlossen. Bei den Bemühungen, die Widerstandswerte abzugleichen, ist aufgefallen, dass sowohl die Amplitude der Oszillationen als auch deren Frequenz stark von

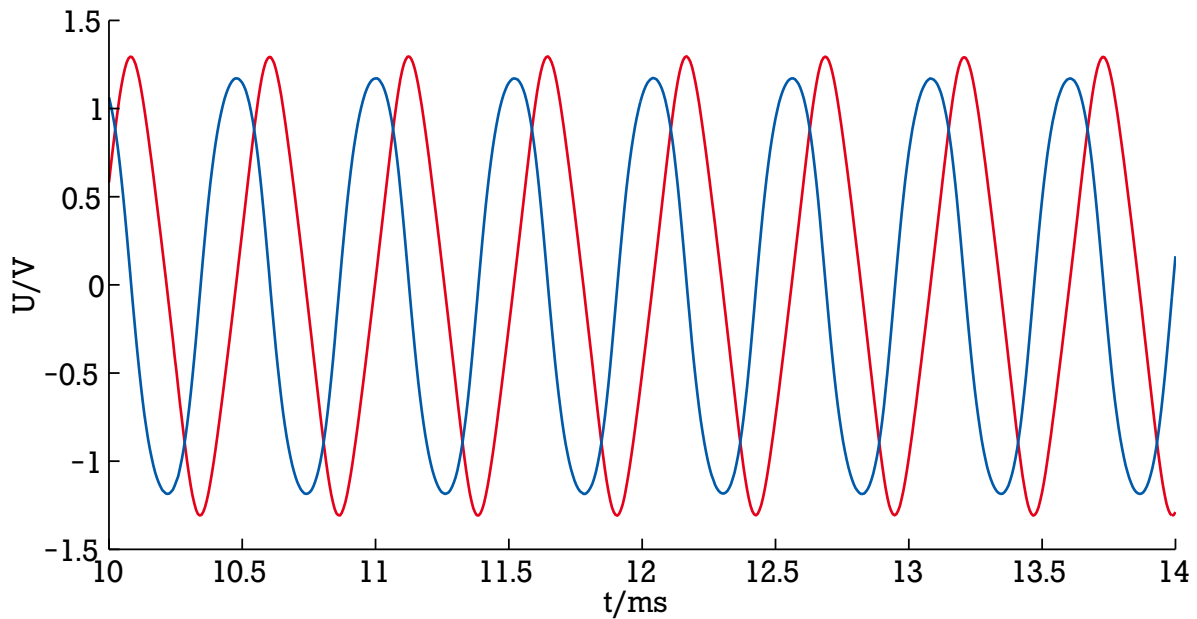


Abbildung 4.2.: Zeitreihe des stabilen Stuart-Landau-Oszillators. Die Spannung der x -Komponente ist blau, die der y -Komponente rot. Zu sehen ist ein leicht asymmetrischer stabiler periodischer Orbit.

der Asymmetrie abhängen. In den Simulationen konnte dieses Verhalten nur andeutungsweise beobachtet werden. Das zeigt, dass der experimentelle Aufbau deutlich komplexer ist, als einfache numerische Simulationen. Das Experiment ist ein komplexes reales System. Die Numerik hingegen behandelt nur die Reinform einer Hopf-Bifurkation, die genauso gut analytisch behandelt werden könnte.

Der für die Kontrollexperimente verwendete Stuart-Landau-Oszillator besitzt den gleichen periodischen Orbit mit dem Unterschied, dass dieser instabil ist. Es gibt zwei stabile Zustände, die im Experiment beobachtet werden können. Das ist, wie bei der Hopf-Normalform, der triviale Fixpunkt. Hinzu kommt ein stabiler periodischer Orbit, der ein experimentelles Artefakt ist. Er entsteht durch die Spannungsbegrenzung der Operationsverstärker und der Multiplikatoren. Der Spannungsverlauf dieses Orbits entspricht weitgehend einem Rechtecksignal mit der Amplitude der Sättigungsspannung der Bauteile (ca. ± 14 V). Er ist damit deutlich vom Pyragas-Orbit zu unterscheiden.

Anfangsbedingungen

Da der Stuart-Landau-Oszillator kein chaotisches System ist, ist das präzise Festlegen der Anfangsbedingungen besonders wichtig. Eine der Voraussetzungen der zeitverzögerten Rückkopplungskontrolle ist, dass die Trajektorie irgendwann nah genug am Pyragas-Orbit vorbeikommt. Bei einem chaotischen System sind die instabilen Orbits im chaotischen Attraktor eingebettet, sie bilden sein Skelett. Die Voraussetzung, dass die Trajektorie nah genug am Pyragas-Orbit vorbeikommt, wird daher von selbst erfüllt.

Bei der experimentellen Umsetzung des Stuart-Landau-Oszillators hingegen gibt es zwei stabile Zustände. Der Schwingkreis befindet sich entweder auf dem trivialen Fixpunkt oder auf dem durch die Spannungsbegrenzung hervorgerufenen Orbit. Die Trajektorie kommt daher nie nah genug am instabilen Orbit vorbei. Daher wurde die elektronische Schaltung so konzipiert, dass ein einfaches Setzen der Anfangsbedingungen möglich war. Das Setzen der Anfangsbedingungen wurde von der Steuerschaltung koordiniert und wird im entsprechenden Kapitel genauer beschrieben.

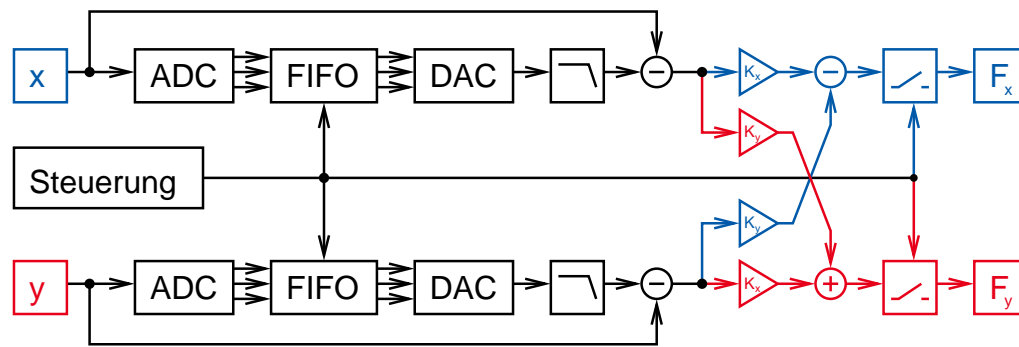


Abbildung 4.3.: Schematische Darstellung der Kontrollschaltung. Schwarz: Zeitverzögerungsschaltung. Rechts daneben sind die Erzeugung und die Ankopplung der Kontrollkräfte dargestellt. Blau: x -Komponente der Kontrollkraft. Rot: y -Komponente der Kontrollkraft.

4.1.2 Zeitverzögerung und Ankopplung

Für die Zeitverzögerung wurde eine digitale Realisierung gewählt. Die verwendete Schaltung ist eine Weiterentwicklung eines gruppeninternen Gemeinschaftsprojekts. Das grundlegende Funktionsprinzip der Zeitverzögerung und der Steuerschaltung wurde von Klaus Höhne entwickelt. In Abbildung 4.3 ist ihr Aufbau skizziert. Das analoge Eingangssignal wird zuerst von einem 8bit Analog-Digital-Wandler (ADC) digitalisiert. Das digitalisierte Signal wird in festen Zeitschritten im FIFO zwischengespeichert. Der FIFO kann bis zu 2^{10} 8bit-Werte speichern. Nach einer gewissen Zeit gibt der FIFO den gespeicherten Wert an den Digital-Analog-Wandler (DAC) aus. Das analog gewandelte Signal zeigt noch deutliche Stufen. Mit einem Tiefpassfilter wird das Signal geglättet. Nachdem die Differenz zum aktuellen Eingangssignal gebildet wurde, wird das Signal in der Ankopplungsschaltung weiterverarbeitet.

Die Diskretisierung von Zeit und Spannung scheint zunächst ein Nachteil zu sein. Die Diskretisierung der Zeit bringt jedoch entscheidende Vorteile. So lässt sich die Verzögerungszeit gut auf die Umlauffrequenz des Pyragas-Orbits anpassen, was insbesondere bei autonomen Systemen wichtig ist. Mit rein analogen Verzögerungsschaltungen ist die Anpassung der Verzögerungszeit nur in groben Schritten möglich. Die Diskretisierung der Spannung ist bei entsprechender Anpassung unproblematisch.

Sowohl der Analog-Digital-Wandler als auch der FIFO benötigen Taktsignale, die die Umwandlung, Speicherung oder Ausgabe der Signale regeln. Die Analog-Digital-Wandlung und das Speichern erfolgen zeitgleich. Die Ausgabe des FIFO erfolgt um die Verzögerungszeit versetzt. In der Zeit, bis das erste Signal ausgegeben wird, wird das Ausgangssignal des Digital-Analog-Wandlers und dessen Differenz zum aktuellen Eingangssignal auf einen definierten Wert gesetzt (0 V). Der ganze Ablauf wird von der Steuerschaltung koordiniert.

Für die Drehmatrixankopplung kommen vier Multiplizierer zum Einsatz, die gleichzeitig zum Addieren verwendet wurden. Paarweise liefern sie die Kontrollkraft der x - und y -Komponente. Die Kontrollamplituden werden als Gleichspannungen von zwei Funktionsgeneratoren geliefert, die sich von einem Rechner steuern lassen.

4.1.3 Steuerung

Die Steuerschaltung ist zentraler Bestandteil des experimentellen Aufbaus und übernimmt mehrere Aufgaben. Ursprünglich als Steuerschaltung für die Zeitverzögerungen konzipiert, wurde sie von mir so erweitert, dass sie auch das Setzen der Anfangsbedingungen im Stuart-Landau-Oszillator übernehmen konnte, ohne dadurch das modulare Konzept zu beeinträchtigen. Außerdem habe ich sie deutlich überarbeitet, sodass sie zuverlässiger arbeitet, von einem Messrechner aus gesteuert werden kann und eventuelle Fehlfunktionen selbst behebt.

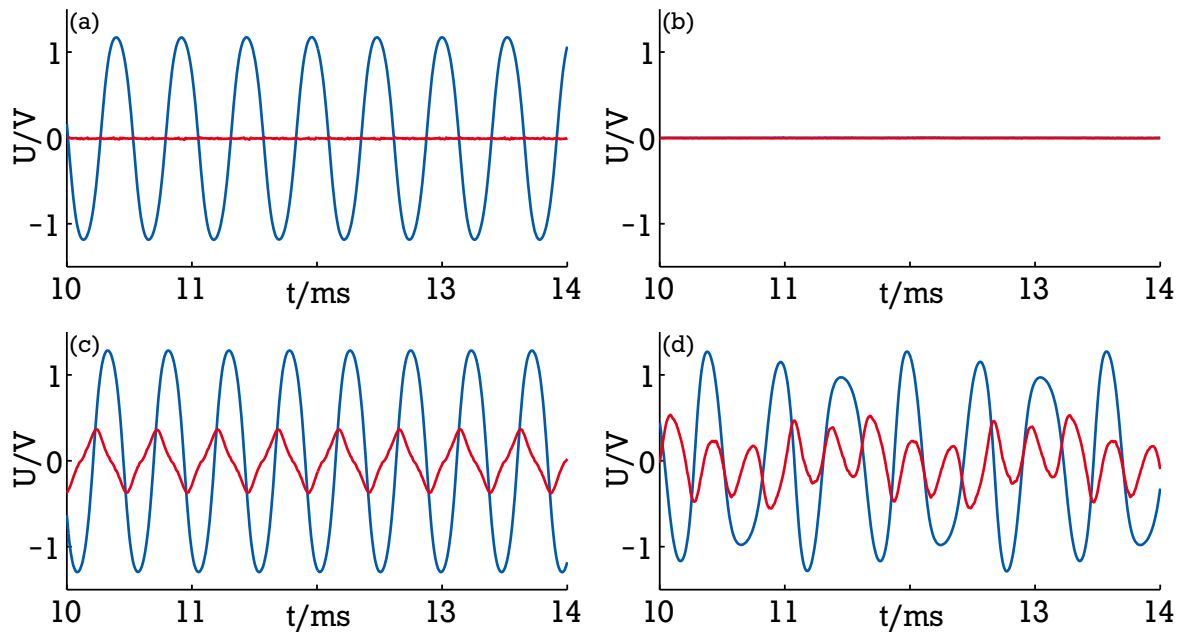


Abbildung 4.4.: Zeitreihen des Stuart-Landau-Oszillators unter Kontrolle. Blau: x -Komponente. Rot: Kontrollkraft, die auf die x -Komponente wirkt. (a) kontrollierter Pyragas-Orbit, (b) trivialer Fixpunkt, (c) kontrollinduzierter Orbit, (d) kontrollinduzierter Torus

Die Steuerschaltung hat einen Eingang für ein Taktsignal und einen Reset-Trigger. Als Ausgänge stehen zwei Taktsignale zur Verfügung, die für den Analog-Digital-Wandler, das Speichern im FIFO und für die Ausgabe des verzögerten Signals aus dem FIFO benötigt werden. Darüber hinaus gibt es verschiedene Trigger-Ausgänge sowie eine Reset-Leitung, die den FIFO leert. Der entsprechende Schaltplan ist im Anhang A.2 zu finden.

Die prinzipielle Funktionsweise soll hier detaillierter erläutert werden. Erhält die Steuerschaltung einen Reset-Puls, entweder von einer externen Schaltung, einem Rechner oder von einem integrierten Taster, werden die beiden Taktsignalausgänge ausgeschaltet, der FIFO geleert und die Trigger-Ausgänge entsprechend gesetzt. Das hat zur Folge, dass der Stuart-Landau-Oszillator angehalten wird und die Kondensatoren der Integratorschaltung für die Anfangsbedingung vorgeladen werden. Die Steuerschaltung wartet dann so lange, bis garantiert ist, dass sich der Stuart-Landau-Oszillator in einem stationären Zustand befindet. Dann lässt sie ihn wieder loslaufen und aktiviert das Taktsignal für die Analog-Digital-Wandlung und den Speichervorgang. Gleichzeitig fängt ein Zähler der Steuerung an, synchron zum Taktsignal hochzuzählen, bis ein voreingestellter Zahlenwert erreicht ist. Zu diesem Zeitpunkt sind die Anfangsbedingungen gesetzt, zu denen der gesamte Inhalt der Zeitverzögerung zählt. Das Taktsignal für die Ausgabe aus dem FIFO wird eingeschaltet und die Kontrollkräfte an den Stuart-Landau-Oszillator angekoppelt. Die Verzögerungszeit ergibt sich aus der Anzahl von Taktzyklen, die bis zur Ausgabe abgewartet werden, und der Taktfrequenz selbst.

Die Anzahl der Taktzyklen kann entweder über kleine Schalter als Binärzahl eingegeben oder von einem Rechner vorgegeben werden. Die dazu nötige Schaltung basiert auf dem EPP-Protokoll der parallelen Schnittstelle und ermöglicht das Ansprechen mehrerer Steuerschaltungen. Da im Experiment die Verzögerungszeit nicht variiert wurde, soll hier nicht weiter darauf eingegangen werden.

4.2 Kontrollexperimente am Stuart-Landau-Oszillator

Primäres Ziel dieser Arbeit ist der Nachweis, dass sich auch torsionsfreie instabile periodische Orbits durch zeitverzögerte Rückkopplungskontrolle experimentell stabilisieren lassen. In diesem Kapitel wird dieser

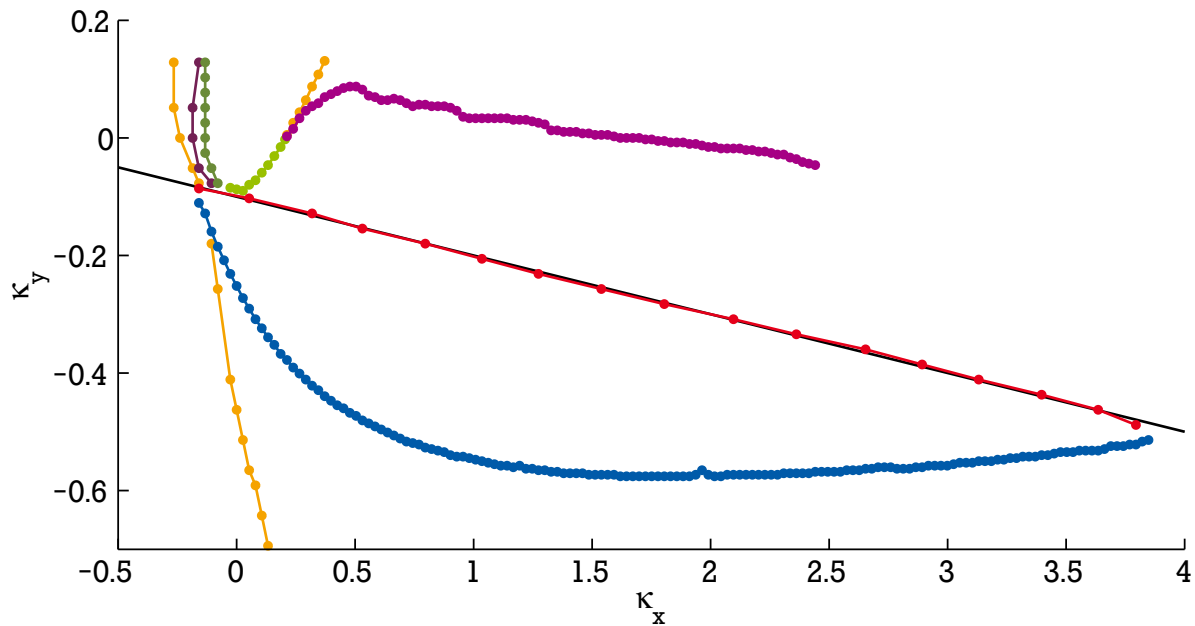


Abbildung 4.5.: Von Hand ausgemessenes Bifurkationsdiagramm. Rot: transkritische Bifurkation. Blau: Hopf-Bifurkation des Pyragas-Orbits. Grün: Sattel-Knoten-Bifurkation, dunkelgrün: Radius kleiner als der des Pyragas-Orbits, hellgrün: Radius größer als der des Pyragas-Orbits. Violett: Hopf-Bifurkation der kontrollinduzierten Orbits. Orange: homokline Bifurkation. Schwarze Linie: Vorhersage der Theorie

Nachweis erbracht. Abbildung 4.4 a zeigt den kontrollierten Orbit des Stuart-Landau-Oszillators. Die x -Komponente und die auf sie wirkende Kontrollkraft sind als Zeitreihen dargestellt. Die Frequenz und Amplitude des kontrollierten Orbits entsprechen denen in Kapitel 4.1.1. Die Kontrollkraft verschwindet fast vollständig, damit ist der Kontrolleingriff nichtinvasiv. Das heißt: Zum ersten Mal wurde ein torsionsfreier instabiler periodischer Orbit durch zeitverzögerte Rückkopplungskontrolle erfolgreich stabilisiert!

Neben dem Nachweis, dass Kontrolle möglich ist, interessiert in der Praxis vor allem die Größe des Kontrollgebiets. Dieses Kontrollgebiet wird durch eine transkritische und eine Hopf-Bifurkation begrenzt. Darüber hinaus treten weitere Bifurkationen auf, die indirekt Einfluss auf das Kontrollgebiet nehmen können, wie zum Beispiel die Sattel-Knoten-Bifurkation.

Die Bifurkationslinien wurden von Hand vermessen und dabei ihr Bifurkationstyp bestimmt. Dazu wurde ein Raster für die Spannungen U_{K_x} und U_{K_y} vorgegeben, die den Kontrollamplituden κ_x und κ_y entsprechen. Das Raster hatte in den beiden Spannungen im Allgemeinen zwei unterschiedliche Auflösungen. Der Grund hierfür ist, dass so der Verlauf der Bifurkationslinien besser wiedergegeben wurde, ohne unnötig viele Messpunkte aufzunehmen. Entlang der grober gerasterten Spannung wurden die Bifurkationspunkte durch Veränderung der feiner gerasterten Spannung bestimmt. Als Messgröße wurde die auf die x -Komponente wirkende Kontrollkraft gewählt und bei Bedarf die x -Komponente zur Beurteilung der Bifurkation hinzugezogen.

Wird ausgehend vom stabilisierten Pyragas-Orbit die transkritische Bifurkation überschritten, entsteht aus dem verschwindend kleinen Kontrollsignal am Bifurkationspunkt eine Art Dreieckssignal mit steigender Amplitude (Abb. 4.4 c). In der x -Komponente ändern sich sowohl Amplitude als auch Frequenz der Oszillationen. Bei der Hopf-Bifurkation des Pyragas-Orbits ändert sich die Frequenz nicht. Am Bifurkationspunkt tritt eine Amplitudenmodulation in der x -Komponente auf, aus der Oszillation im Kontrollsignal resultieren (Abb. 4.4 d). Der stetige Übergang beider Bifurkationen macht eine Lokalisierung des Bifurkationspunkts schwierig, insbesondere da eine rauschinduzierte Dynamik wegen der geringen Dämpfung um den Bifurkationspunkt die untersuchte deterministische Dynamik überdeckt.

Am einfachsten war die Sattel-Knoten-Bifurkation zu bestimmen. Bei ihr kollidiert der kontrollinduzierte Orbit, der durch die transkritische Bifurkation stabil wird, mit einem instabilen Orbit und wird dabei vernichtet. Wird im Experiment der Bifurkationspunkt der Sattel-Knoten-Bifurkation überschritten, springt das System entweder auf den trivialen Fixpunkt oder auf den Orbit, der durch die Sättigungsspannung der aktiven Elemente entsteht. Die exakte Lage des Bifurkationspunkts lässt sich wegen des Rauschens nicht genau bestimmen. In der Nähe des Bifurkationspunkts liegen stabiler und instabiler Orbit sehr nahe beieinander (vgl. Abb. 2.4 auf S. 18). Das Rauschen kann die Trajektorie auf die andere Seite des instabilen Orbits heben, sodass sie nicht mehr im Einzugsbereich des stabilen Orbits liegt. Der instabile Orbit drückt dann die Trajektorie vom stabilen Orbit weg. Der kontrollinduzierte Orbit, der die Sattel-Knoten-Bifurkation zeigt, kann sowohl größere als auch kleinere Amplituden als der Pyragas-Orbit haben. Bei dem Wechsel von größerer zu kleinerer Amplitude kommt die Sattel-Knoten-Bifurkation im Experiment der transkritischen Bifurkation sehr nahe oder berührt sie. Genau ließ sich das nicht beobachten. In der Veröffentlichung [Just u. a., 2007] wurde ein solcher Berührungspunkt angesprochen (vgl. Kap. 2.2.1).

Neben diesen drei vorhergesagten Bifurkationen wurden noch zwei weitere Bifurkationstypen gefunden. Der kontrollinduzierte Orbit zeigt neben der Sattel-Knoten-Bifurkation auch noch Hopf-Bifurkationen, die Tori erzeugen. Die zweite Bifurkation vernichtet die Tori der kontrollinduzierten Orbits und des Pyragas-Orbits. Zunächst wurde angenommen, dass es sich dabei um eine Sattel-Knoten-Bifurkation der Tori handelt. Inzwischen konnte sie jedoch als homokline Bifurkation identifiziert werden [Guckenheimer u. Holmes, 1983].

In Abbildung 4.5 sind alle im Experiment gefundenen Bifurkationslinien zusammengestellt. Das Kontrollgebiet, in dem der Pyragas-Orbit stabil ist, liegt zwischen der transkritischen Bifurkation (rot) und der Hopf-Bifurkation (blau). Die Form beider Bifurkationslinien entspricht dem erwarteten Verlauf. Oberhalb der transkritischen Bifurkation tritt die Sattel-Knoten-Bifurkation (grün) auf. Der linke Teil der Sattel-Knoten-Bifurkationslinie (dunkelgrün) tritt für Amplituden des kontrollinduzierten Orbits auf, die kleiner sind als die des Pyragas-Orbits, der rechte (hellgrün) für größere Amplituden. Bei diesem Abschnitt der Sattel-Knoten-Bifurkationslinie tritt eine interessante Situation ein. Die Linie endet nämlich an dem Punkt, an dem die Hopf-Bifurkationslinie des kontrollinduzierten Orbits (violett) und die homokline Bifurkationslinie (orange) beginnen. Die andere Hopf-Bifurkationslinie des kontrollinduzierten Orbits, links im Bild, scheint eine Verlängerung der Hopf-Bifurkationslinie des Pyragas-Orbits zu sein.

Um die theoretischen Vorhersagen mit dem Experiment vergleichen zu können, wurden die Kontrollamplituden reskaliert. Dazu wurde der Verlauf der transkritischen Bifurkation verwendet, wie er in Kapitel B.2 hergeleitet wird:

$$c_0 - c_x U_{K_x} - c_y U_{K_y} = 0 \quad (4.5a)$$

$$1 - \kappa_x - \gamma \kappa_y = 0 \quad (4.5b)$$

Dabei sind U_{K_x} und U_{K_y} die Spannungen, die den Kontrollamplituden entsprechen. Darüber hinaus wurde angenommen, dass die aus den Schaltplänen abgeleiteten Werte für λ und γ Gültigkeit haben. Es ergibt sich daraus der Zusammenhang für die Normierung:

$$\kappa_x = \frac{c_x}{c_0} U_{K_x} \quad (4.6a)$$

$$\kappa_y = \frac{c_y}{\gamma c_0} U_{K_y} \quad (4.6b)$$

In der Tat weicht die Steigung der transkritischen Bifurkation $\frac{c_y}{c_x}$ im Experiment nur um ca. 3% von γ ab. Entsprechend der gewählten Normierung liegen die transkritische Bifurkation und deren Vorhersage exakt aufeinander (vgl. Abb. 4.5). Bei der Hopf-Bifurkation des Pyragas-Orbits scheint keine direkte Verbindung zwischen Experiment und Theorie zu existieren. Es wurde sehr viel Zeit investiert, um sämtliche Fehlerquellen auszuschließen. Im Endeffekt musste der Schluss gezogen werden, dass die Näherung $\lambda \nearrow 0$ bei der Herleitung der Hopf-Bifurkationslinie für die Diskrepanz verantwortlich ist.

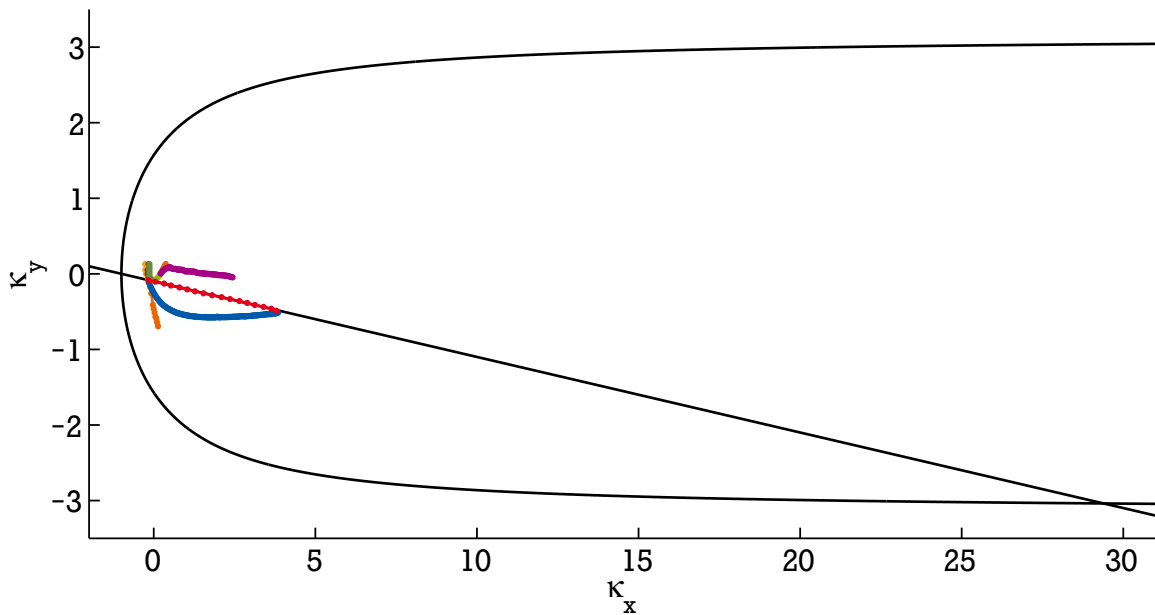


Abbildung 4.6.: Vergleich der experimentell bestimmten Bifurkationen mit ihrer theoretischen Vorhersage. Rot: transkritische Bifurkation. Blau: Hopf-Bifurkation des Pyragas-Orbits. Grün: Sattel-Knoten-Bifurkation. Violett: Hopf-Bifurkation der kontrollinduzierten Orbits. Orange: homokline Bifurkation. Schwarze Linie: Vorhersage der Theorie

Um Informationen zu bekommen, wie sich die Kontrollmethode unter „realen“ Bedingungen verhält, wurden automatisierte Messungen mit verschiedenen Startbedingungen durchgeführt. Dazu wurde ein äquidistantes Raster über die κ_x - κ_y -Ebene gelegt. Von einem LabView-Programm wurde für jedes κ_x - κ_y -Wertepaar mit der Steuerschaltung eine zuvor festgelegte Anfangsbedingung gesetzt. Nach einer kurzen Einschwingzeit wurde eine Zeitreihe der x -Komponente und der auf sie wirkenden Kontrollkraft aufgenommen. Für eine automatisierte Auswertung der Zeitreihen wurden verschiedene Methoden ausprobiert, unter anderem auch spektrale. Im Endeffekt kam folgende Methode zum Einsatz:

Die Zeitreihen der x -Komponente und der auf sie wirkenden Kontrollkraft wurden über eine Hilbert-Transformation in Phase und Amplitude zerlegt. Für die Amplituden des Kontrollsignals und der x -Komponente wurden dann Mittelwert und Standardabweichung berechnet. Anhand dieser Werte konnte eine Fallunterscheidung durchgeführt werden und so der kontrollierte Pyragas-Orbit von den kontrollinduzierten Orbits und vom trivialen Fixpunkt unterschieden werden. In Abbildung 4.7 sind die Amplituden beider Signale für einen vertikalen Schnitt durch die κ_x - κ_y -Ebene dargestellt. Die Standardabweichungen der Amplituden sind als Fehlerbalken eingezeichnet. Im mittleren Bereich der Abbildung ist die Amplitude des kontrollierten Pyragas-Orbits (blau) zu sehen. Für den Pyragas-Orbit verschwindet die Kontrollkraft (rot). Für beide Amplituden, die des Pyragas-Orbits und die der Kontrollkraft, ist die Standardabweichung verschwindend klein, da sie nur durch das Rauschen beeinflusst wird. Links daneben ist der kontrollinduzierte Orbit dargestellt, der aus der transkritischen Bifurkation hervorgeht. Seine Amplitude steigt langsam an, ebenso die der Kontrollkraft (vgl. Abb. 4.4 c). Beim kontrollinduzierten Torus auf der rechten Seite in Abbildung 4.7 steigen sowohl die mittlere Amplitude der Kontrollkraft als auch deren Standardabweichung an. Diese Standardabweichung beider Größen ist ein Maß für die Stärke der Amplitudenmodulation (vgl. Abb. 4.4 d).

Um festzustellen, ob ein kontrollinduzierter Orbit vorliegt, eignet sich die Amplitude des Kontrollsignals (rot) am besten. Sobald deren Mittelwert ansteigt, liegt ein kontrollinduzierter Orbit vor. Ist sie verschwindend gering, handelt es sich entweder um den Pyragas-Orbit oder um den trivialen Fixpunkt, für den die Kontrollkraft ebenfalls verschwindet (vgl. Abb. 4.4 b). Aufschluss darüber gibt die

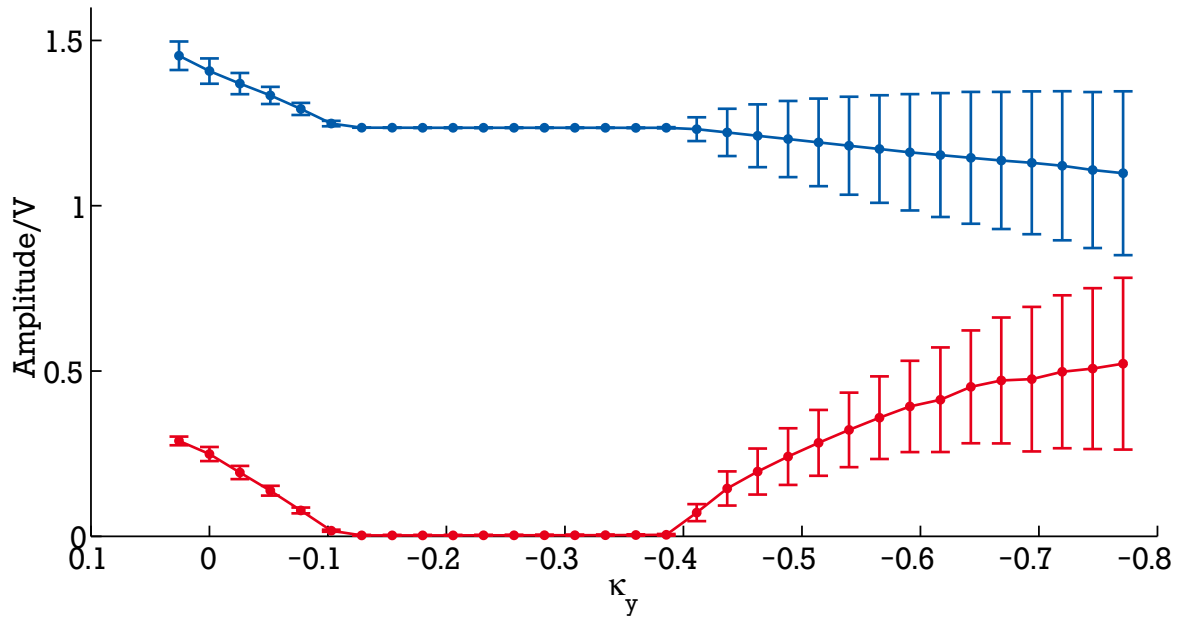


Abbildung 4.7.: Mittelwert und Standardabweichung der Amplituden der x -Komponente (blau) und deren Kontrollsignal (rot). In der Mitte liegt der stabilisierte Pyragas-Orbit, links der kontrollinduzierte, rechts der aus einer Hopf-Bifurkation entstandene Torus. Die Standardabweichung entspricht der Modulationsamplitude ($U_{K_x} = 0.1$ entspricht ca. $\kappa_x = 0.265$).

Amplitude der x -Komponente (blau). Ursprünglich war geplant, anhand der Standardabweichung der x -Komponente festzustellen, ob ein Torus vorliegt. Das hat sich als nicht praktikabel herausgestellt, da anhand dieses Kriteriums ein kontrollinduzierter Orbit und ein Torus nahe der Bifurkationslinie nicht zu unterscheiden waren.

In Abbildung 4.8 sind die Ergebnisse der automatisierten Messung für zwei unterschiedliche Anfangsbedingungen zusammengefasst. Im oberen Teil der Abbildung liegt die Anfangsbedingung des Stuart-Landau-Oszillators bei einem Radius knapp oberhalb dem des Pyragas-Orbits. Beim unteren Teil der Abbildung ist der Radius der Anfangsbedingung knapp unterhalb. In beiden Fällen ist ein Kontrollgebiet (rot) zu finden, dass jedoch kleiner ist, als das per Hand bestimmte aus Abbildung 4.5. Unterhalb der Hopf-Bifurkationslinie ist bei beiden Anfangsbedingungen ein kontrollinduzierter Torus (blau) zu beobachten. Diese Toruslösung wird links im Bild an der homoklinen Bifurkation zerstört. Links davon ist keine stabile Lösung mehr zu finden (weiß), und der Schwingkreis läuft in die Spannungsbegrenzung der Bauteile.

Oberhalb der transkritischen Bifurkation (schwarze Linie) unterscheiden sich beide Bilder wesentlich voneinander. Der Bereich, in dem keine stabile Lösung auftritt (weiß), ist unterschiedlich groß. Das lässt sich verstehen, wenn der Verlauf der Sattel-Knoten-Bifurkation aus Abbildung 4.5 berücksichtigt wird. Im oberen Teil der Abbildung 4.8 stellt die Sattel-Knoten-Bifurkation, die einen größeren Radius als der Pyragas-Orbit hat, zusammen mit der homoklinen Bifurkation die Begrenzung dar. Links von ihnen existiert ein stabiler kontrollinduzierter Orbit (blau) mit einem Radius, der ebenfalls größer ist als der des Pyragas-Orbits. Im unteren Teil der Abbildung existiert der stabile kontrollinduzierte Orbit zwischen der homoklinen Bifurkation und der Sattel-Knoten-Bifurkation. Sein Radius ist dementsprechend kleiner als der des Pyragas-Orbits. Links neben der homoklinen Bifurkation existiert keine stabile Lösung. Rechts neben der Sattel-Knoten-Bifurkation existiert kein stabiler kontrollinduzierter Orbit mit einem Radius, der kleiner ist als der des Pyragas-Orbits. Das System fällt deshalb auf den stabilen trivialen Fixpunkt (gelb). Warum im oberen Teil der Abbildung ebenfalls der triviale Fixpunkt angesprochen wurde, ließ sich nicht endgültig klären.

Es wurden weitere Messungen mit anderen Anfangsbedingungen durchgeführt, um Hinweise auf die Einzugsbereiche zu erhalten. Generell lässt sich folgende Aussage aus ihnen ableiten: Wird eine Anfangsbedingung gewählt, die bezüglich des Radius unterhalb des Pyragas-Orbits liegt, läuft die Trajektorie vorzugsweise auf den trivialen Fixpunkt. Wird der Radius der Anfangsbedingung verkleinert, nimmt diese Neigung zu und das Kontrollgebiet schrumpft, bis es irgendwann verschwindet. Liegt der Radius der Anfangsbedingung oberhalb des Pyragas-Orbits, wird einer der kontrollinduzierten Orbits bevorzugt. Auch hier schrumpft das Kontrollgebiet, wenn der Radius der Anfangsbedingung vergrößert wird.

Um genauere Aussagen treffen zu können, müssen systematische Messungen durchgeführt werden, die den zeitlichen Rahmen dieser Arbeit gesprengt hätten.

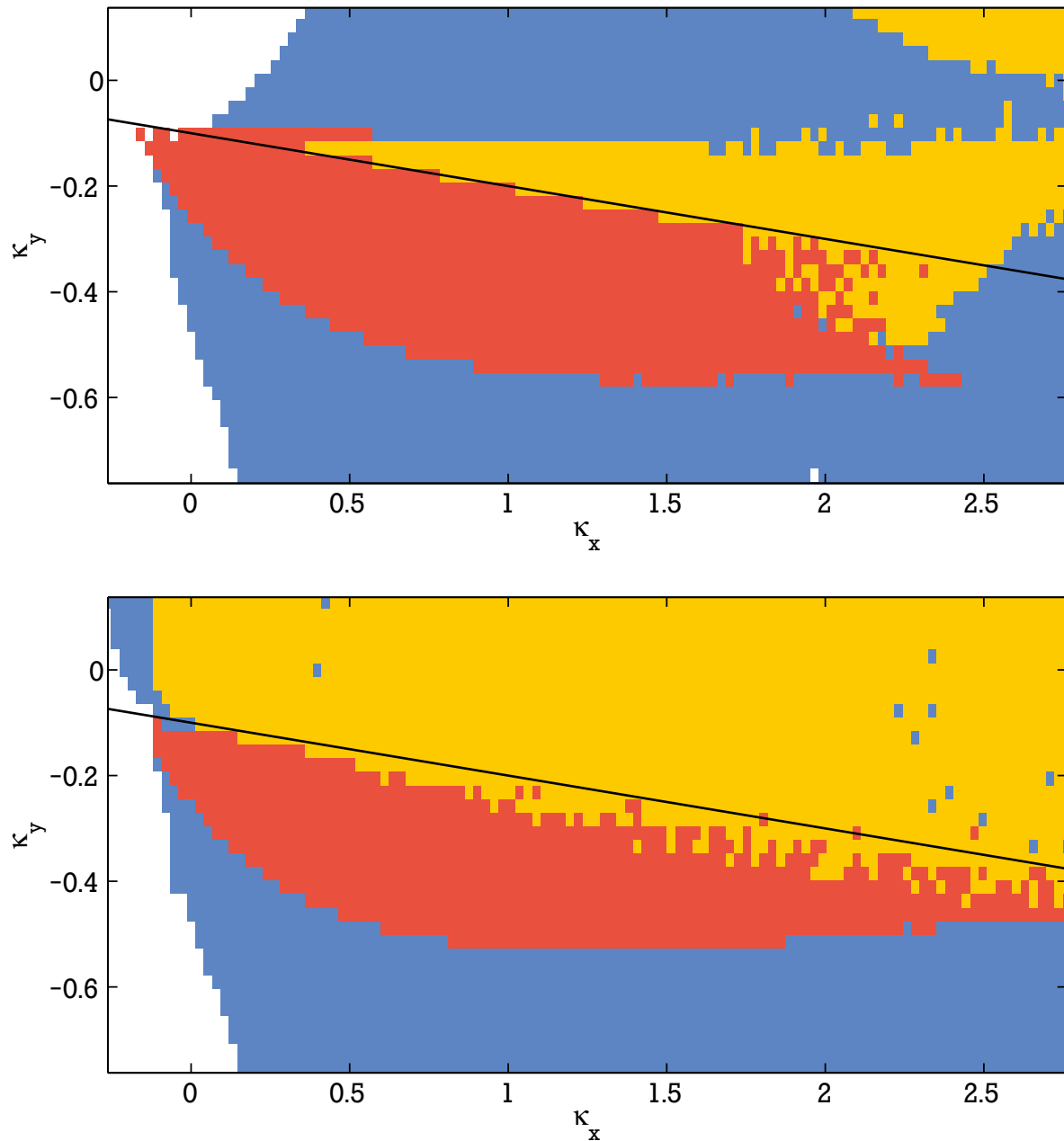


Abbildung 4.8.: Automatisch vermessene κ_x - κ_y -Ebenen für verschiedene Anfangsbedingungen. Rot: Pyragas-Orbit. Blau: kontrollinduzierter Orbit. Gelb: trivialer Fixpunkt. Weiß: Operationsverstärker in Begrenzung. Schwarze Linie: Vorhersage der Theorie **Oben:** Anfangsbedingung des Stuart-Landau-Oszillators knapp oberhalb des Pyragas-Orbits. **Unten:** Anfangsbedingung knapp unterhalb des Pyragas-Orbits



5 Theorie

Um den Diskrepanzen zwischen Experiment und der bisherigen Theorie auf den Grund zu gehen, habe ich eigene theoretische Überlegungen angestellt, die über die in Kapitel 2 hinausgehen. Es wird wie in Kapitel 2 von der Hopf-Normalform ausgegangen, die in der komplexen Form¹

$$\dot{z} = (\lambda + i)z + (1 + i\gamma)|z|^2 z - (K_x + iK_y)(z - z_\tau) \quad (5.1)$$

dargestellt werden kann. Mit dem Ansatz harmonischer periodischer Lösungen $z_i = R_i \exp(i\Omega_i t)$ ergibt sich eine transzendente Gleichung für Ω_i , die unter Kontrolle eine Vielzahl von Lösungen besitzt (vgl. Gl. (2.5)):

$$R_i = \sqrt{-\lambda + K_x(1 - \cos(\Omega_i \tau)) - K_y \sin(\Omega_i \tau)} \quad (5.2a)$$

$$\Omega_i = \left(1 + \gamma R_i^2\right) - K_x \sin(\Omega_i \tau) - K_y (1 - \cos(\Omega_i \tau)) \quad (5.2b)$$

Im Gegensatz zu Kapitel 2.2 wird hier die Linearisierung um einen kontrollinduzierten Orbit mit dem Ansatz $z = (1 + \delta r + i\delta \varphi) \cdot z_i$ betrachtet. Sie ergibt sich zu:

$$\begin{pmatrix} \dot{\delta r} \\ \dot{\delta \varphi} \end{pmatrix} = 2R_i^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \gamma & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta r \\ \delta \varphi \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} K_x & -K_y \\ K_y & K_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\Omega_i \tau) & \sin(\Omega_i \tau) \\ -\sin(\Omega_i \tau) & \cos(\Omega_i \tau) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta r - \delta r_\tau \\ \delta \varphi - \delta \varphi_\tau \end{pmatrix} \quad (5.3)$$

Unter der Bedingung, dass die Differenzialgleichungen sowohl der Amplitudenvariable δr als auch der Phasenvariable $\delta \varphi$ keine explizite Zeitabhängigkeit besitzen, lässt sich zur Lösung ein Floquet-Ansatz wählen. Die Floquet-Exponenten Λ der kontrollinduzierten Orbits sind dann durch die Nullstellen des charakteristischen Polynoms bestimmt:

$$P(\Lambda) = \det \left[2R_i^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \gamma & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} K_x & -K_y \\ K_y & K_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\Omega_i \tau) & \sin(\Omega_i \tau) \\ -\sin(\Omega_i \tau) & \cos(\Omega_i \tau) \end{pmatrix} (1 - e^{-\Lambda \tau}) - \begin{pmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & \Lambda \end{pmatrix} \right] \quad (5.4)$$

5.1 Begrenzungen des Kontrollgebiets

Transkritische Bifurkation

Wie in Kapitel 2 erläutert, tritt bei der transkritischen Bifurkation wegen der Goldstone-Mode eine doppelte Nullstelle im charakteristischen Polynom (5.4) auf. Sie lässt sich am einfachsten durch eine Entwicklung des charakteristischen Polynoms um $\Lambda = 0$ berechnen. Mit Gleichung (5.4) und den Bedingungen des Pyragas-Orbits $\Omega_p \tau = 2\pi$ und $R_p^2 = -\lambda$, ergibt sich:

$$0 = \underbrace{2\lambda\tau(1 + \kappa_x + \gamma\kappa_y)}_{c_1} \Lambda\tau + \underbrace{\left(-\lambda\tau(\kappa_x + \gamma\kappa_y) + (1 + \kappa_x)^2 + \kappa_y^2\right)}_{c_2} (\Lambda\tau)^2 + \mathcal{O}(\Lambda^3) \quad (5.5)$$

Eine doppelte Nullstelle des Polynoms liegt vor, wenn der lineare Anteil c_1 verschwindet. Die Bedingung für die transkritische Bifurkation lautet demnach:

$$\kappa_x = -1 - \gamma\kappa_y \quad (5.6)$$

¹ Im Gegensatz zu Kapitel 2 werden hier die Kontrollamplituden K_x und K_y bzw. κ_x und κ_y verwendet, anstatt der komplexen Schreibweise mit Amplitude K und Phase β .

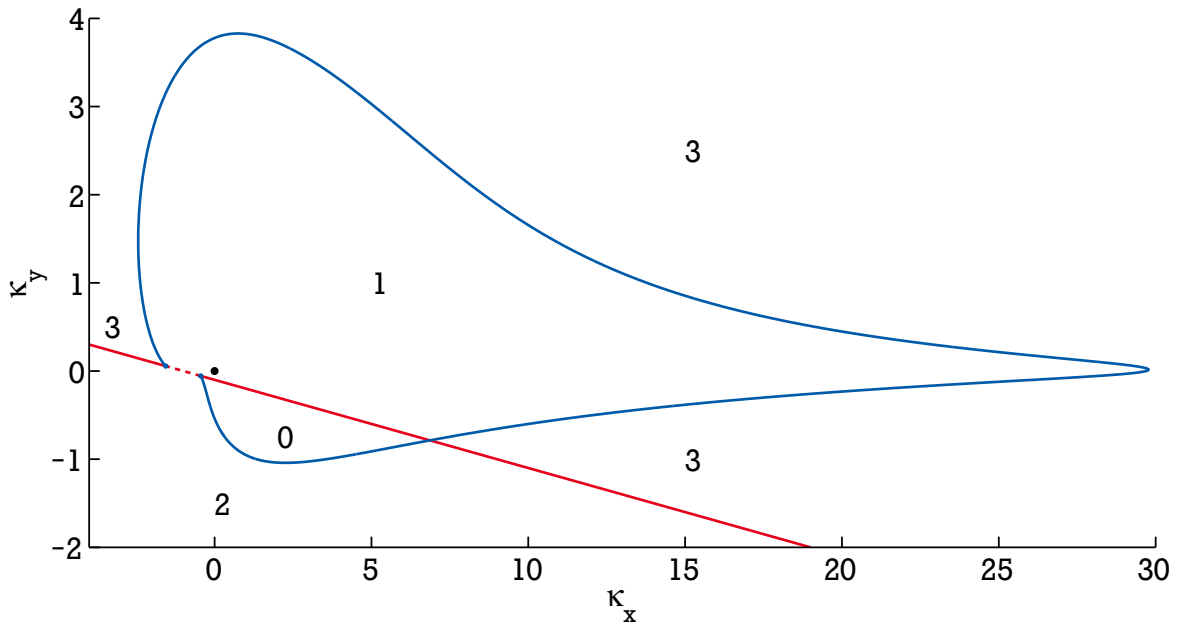


Abbildung 5.1.: κ_x - κ_y -Ebene des Pyragas-Orbits. Dargestellt sind die transkritische Bifurkationslinie (rot) und die relevante Hopf-Bifurkationslinie (blau). Die roten durchgezogenen Linien und die rote gestrichelte Linie stellen die unterschiedlichen Orientierungen der transkritischen Bifurkation dar. Die Zahlen geben die Anzahl der instabilen Floquet-Exponenten des Pyragas-Orbits im entsprechenden Gebiet an, der schwarze Punkt das unkontrollierte System. Für die Darstellung wurde $\lambda = -0,1$ und $\gamma = 10$ gewählt.

Um weiterführende Aussagen über die Art der Bifurkation zu finden, lohnt ein Blick auf den quadratischen Term der Entwicklung c_2 . In Verbindung mit der Bedingung der transkritischen Bifurkation lässt er sich auf die Form

$$c_2 = \lambda \tau + (1 + \gamma^2) \kappa_y^2 \quad (5.7)$$

bringen. Da $\lambda \tau$ negativ und sowohl γ als auch κ_y reellwertig sind, gibt es bei Variation von κ_y zwei Nulldurchgänge, zwischen denen c_2 negativ ist. In unmittelbarer Nähe der Bifurkation, wenn Λ noch reellwertig ist, müssen sich der lineare und quadratische Term gegenseitig aufheben. Das geht nur, wenn $(c_1 c_2 \Lambda \tau)$ negativ ist. Es gilt für die Zentralmanigfaltigkeit des Pyragas-Orbits:

$$c_1 \cdot c_2 \quad \begin{cases} > 0 & \text{stabil} \\ < 0 & \text{instabil} \end{cases} \quad (5.8)$$

Wird κ_x für einen festen Wert κ_y variiert, ist der Gradient von c_1 immer positiv. Das Vorzeichen von c_1 hängt also nur davon ab, auf welcher Seite der Bifurkationslinie sich das System befindet. Eine Veränderung von κ_y bei festem κ_x liefert ein äquivalentes Erkenntnis. An den Punkten, an denen c_2 das Vorzeichen wechselt, dreht sich hingegen die Orientierung der transkritischen Bifurkation, und eine andere Mannigfaltigkeit übernimmt die Rolle der Zentralmannigfaltigkeit. Ein solcher Wechsel der Orientierung kann nur bei einer Kollision mit einer anderen Bifurkationslinie erfolgen, das heißt, durch eine Bifurkation höherer Kodimension.

In Abbildung 5.1 wird dieser Sachverhalt veranschaulicht. Es ist neben der transkritischen und der Hopf-Bifurkationslinie, die im nächsten Abschnitt behandelt wird, die Anzahl der instabilen Floquet-Exponenten des Pyragas-Orbits dargestellt. Die gestrichelte und die durchgezogene rote Linie zeigen die unterschiedlichen Orientierungen der transkritischen Bifurkation. Die blaue Linie stellt die Hopf-Bifurkation dar. Das unkontrollierte System, in der κ_x - κ_y -Ebene durch den schwarzen Punkt gekennzeichnet, besitzt eine instabile Mannigfaltigkeit. Wird die Kontrollamplitude κ_y zu negativen Werten

hin verändert, so wird diese instabile Mannigfaltigkeit stabil und die Kontrolle greift, bis die Hopf-Bifurkation erreicht wird. Dort verlassen zwei komplex konjugierte Eigenwerte den Einheitskreis, und der Pyragas-Orbit wird wieder instabil. Wird ein anderer Weg zu diesem Punkt gewählt – und zwar so, dass nur die transkritische Bifurkationslinie überquert wird (z.B. bei $\kappa_x \approx -1$) – muss eine der stabilen Mannigfaltigkeiten des Pyragas-Orbits instabil werden, damit ebenfalls zwei instabile Eigenwerte vorhanden sind. An dieser Betrachtungsweise wird ein weiterer Umstand ersichtlich. Bei dem Weg über die Hopf-Bifurkation entsteht ein Torus, in dessen Innerem der Pyragas-Orbit liegt. Bei dem Weg nur über die transkritische Bifurkation fehlt dieser Torus. Es muss daher zusätzlich eine homokline Bifurkation vorliegen, die den Torus wieder vernichtet. Diese homokline Bifurkation wurde in den Experimenten (Kapitel 4.2), aber auch in Simulationen [Erzgräber u. Just, 2009] beobachtet. Dieses gleichzeitige Zusammentreffen einer homoklinen, einer Hopf- und einer Sattel-Knoten-Bifurkation² wird als Arnold-Bogdanov-Takens-Punkt oder auch als Bogdanov-Takens-Bifurkation bezeichnet. Einer der beiden Zweige der Sattel-Knoten-Bifurkation bildet unter der Hopf-Bifurkation einen Torus. Mit zunehmendem Abstand vom Bifurkationspunkt wächst der Durchmesser dieses Torus kontinuierlich an, bis er mit dem anderen Zweig der Sattel-Knoten-Bifurkation kollidiert und einen homoklinen Orbit bildet. Bei dieser Kollision, die die homokline Bifurkation darstellt, wird der Torus vernichtet.

Hopf-Bifurkation des Pyragas-Orbits

Wie schon in Abbildung 5.1 vorweggenommen, kommt die Hopf-Bifurkation des Pyragas-Orbits für eine Kollision mit der transkritischen Bifurkation in Frage. In Kapitel 2.2.1 wurde die Hopf-Bifurkationslinie des Pyragas-Orbits aus der des trivialen Fixpunkts abgeleitet. Bei den Experimenten (Kapitel 4.2) und den Simulationen (Kapitel 3.4) hat sich gezeigt, dass diese Näherung viel zu grob ist. Daher habe ich eine exakte analytische Lösung der Hopf-Bifurkationslinie berechnet.

Bei einer Hopf-Bifurkation zeigt der Realteil zweier komplex konjugierter Floquet-Exponenten einen Nulldurchgang. Die Floquet-Exponenten sind deshalb am Bifurkationspunkt rein imaginär. Bei der Hopf-Bifurkation eines Orbits mit der Umlauffrequenz Ω_p entsteht ein Torus, um den sich die Trajektorie mit einer neuen Frequenz Ω_h schraubt. Die Hopf-Bifurkation lässt sich aus dem charakteristischen Polynom (5.4) mit der Bedingung $\Omega_p \tau = 2\pi$ und dem Ansatz $\Lambda \tau = i\Omega_h \tau = i\phi_h$ bestimmen. Nach einer Trennung in Real- und Imaginärteil gibt es zwei Lösungen für κ_x und κ_y , die von ϕ_h als Bahnparameter abhängen. Dabei lässt sich die eine Lösung durch $\phi_h \rightarrow -\phi_h$ in die jeweils andere Lösung überführen.

$$\kappa_x = \frac{2\lambda\tau \cos \phi_h - \phi_h \sin \phi_h}{\phi_h (1 - \cos \phi_h) - \lambda\tau \sin \phi_h} \cdot \frac{\phi_h}{2} + \frac{\gamma \lambda\tau \sin \phi_h}{\phi_h (1 - \cos \phi_h) - \lambda\tau \sin \phi_h} \kappa_y \quad (5.9a)$$

$$\kappa_y = \frac{P \pm \sqrt{P^2 - QD}}{D} \cdot \frac{\phi_h}{2} \quad (5.9b)$$

Zur besseren Lesbarkeit wurden folgende Abkürzungen eingeführt:

$$\begin{aligned} P &= \lambda\tau \gamma (\phi_h (1 - \cos \phi_h) - 2\lambda\tau \sin \phi_h) \\ Q &= 4(\lambda\tau) (1 + \cos \phi_h) \left(\frac{(\lambda\tau)^2 + \phi_h^2 (1 - \cos \phi_h)}{\phi_h \sin \phi_h} - (\lambda\tau) \right) - \phi_h^2 (1 - \cos \phi_h) - 2(\lambda\tau)^2 \\ D &= (\lambda\tau)^2 (1 + \gamma^2) (1 + \cos \phi_h) + \phi_h (\phi_h (1 - \cos \phi_h) - 2\lambda\tau \sin \phi_h) \end{aligned}$$

Die Hopf-Bifurkationslinie besteht aus einer unendlichen Zahl von verschiedenen Zweigen, die jeweils für $\phi_h = 2\pi n + [0, 2\pi)$ auftreten. Jeder dieser Zweige hat eine maximale Hopf-Frequenz, bei der der Term $(P^2 - QD)$ verschwindet und die beiden Lösungen der Zweige aneinander anschließen. Für jeden Zweig der Bifurkationslinie bilden beide Lösungen eine zusammenhängende Kurve.

² Eine transkritische Bifurkation kann als Zusammenstoßen zweier Sattel-Knoten-Bifurkationen interpretiert werden (vgl. Anhang B.1).

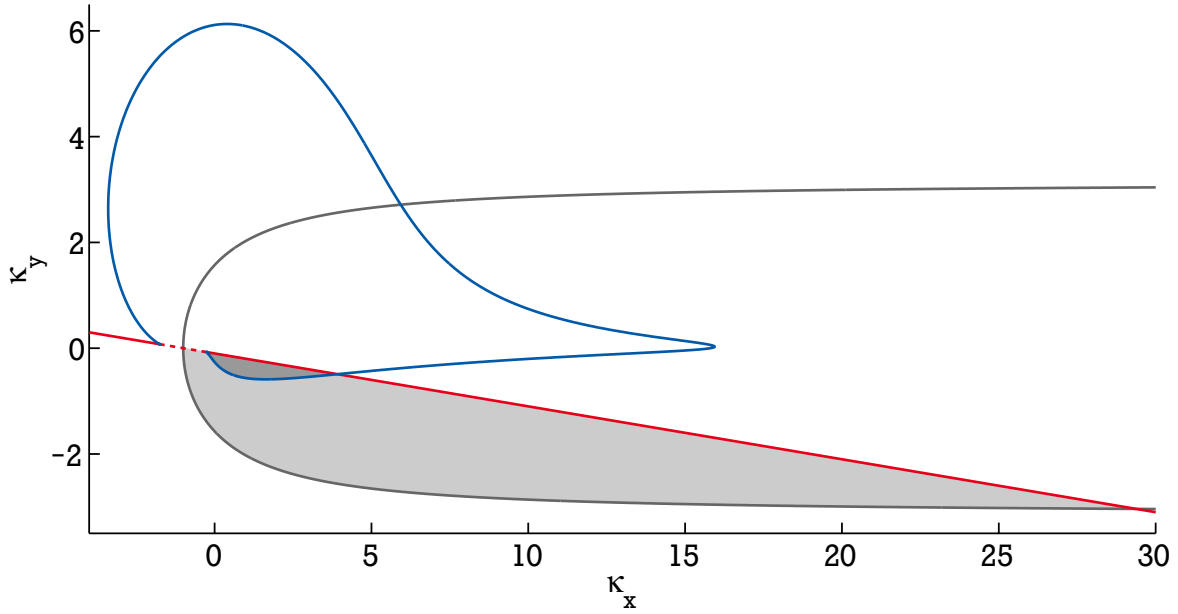


Abbildung 5.2.: Vergleich der Hopf-Bifurkationslinie der allgemeinen Lösung (blau) mit der Lösung für den Grenzfall $\lambda \nearrow 0$ (grau). Die transkritische Bifurkation (rot) ist ebenfalls dargestellt. Es tritt ein dramatischer Unterschied in der Größe der Kontrollgebiete auf. Die Parameter wurden so gewählt, dass sie die experimentelle Situation wiedergeben. ($\lambda = -1$; $\gamma = 10$)

Interessant ist das Verhalten der minimalen Hopf-Frequenz der Zweige. Zunächst soll der Fall $\phi_h \rightarrow 0$ betrachtet werden. Eine Entwicklung des charakteristischen Polynoms nach ϕ_h ergibt:

$$0 = \underbrace{2\lambda\tau(1 + \kappa_x + \gamma\kappa_y)}_{c_1} i\phi_h - \underbrace{\left((1 + \kappa_x)^2 + \kappa_y^2 - \lambda\tau(\kappa_x + \gamma\kappa_y)\right)}_{c_2} \phi_h^2 + \mathcal{O}(\phi_h^3) \quad (5.10)$$

Dieses Polynom hat die gleiche Form wie das Polynom der transkritischen Bifurkation (5.5). Die Kollision beider Bifurkationen tritt für die dreifache Nullstelle

$$\kappa_x = -1 - \gamma\kappa_y \quad (5.11a)$$

$$\kappa_y = \pm \sqrt{\frac{-\lambda\tau}{1 + \gamma^2}} \quad (5.11b)$$

auf. Wie im Abschnitt der transkritischen Bifurkation erläutert, muss es aus Gründen der Konsistenz für diesen Zweig der Hopf-Bifurkationen auch eine homokline Bifurkation geben, die im selben Punkt mit der transkritischen Bifurkation kollidiert. Im Kapitel 5.2 wird sich zeigen, dass die Hopf-Bifurkationslinien der kontrollinduzierten Orbits auch an diesen Kollisionen beteiligt sind. Es handelt sich dabei um symmetrieentartete Arnold-Bogdanov-Takens-Punkte.

Für alle anderen Zweige der Hopf-Bifurkation ($\phi_h \searrow n(2\pi)$ mit $n > 0$) ergeben sich die Grenzwerte:

$$\kappa_x \rightarrow -\infty \quad (5.12a)$$

$$\kappa_y \rightarrow \pm\sqrt{\infty} \quad (5.12b)$$

In den Veröffentlichungen [Fiedler u. a., 2007] und [Just u. a., 2007] wird nur der Grenzfall $\lambda \nearrow 0$ betrachtet. Dieser Grenzfall ist durch einfache Entwicklung der Gleichungen (5.9) um $\lambda = 0$ zu finden:

$$\kappa_x = \frac{\sin \phi_h}{(1 - \cos \phi_h)} \cdot \frac{-\phi_h}{2} \quad (5.13a)$$

$$\kappa_y = \frac{-\phi_h}{2} \quad (5.13b)$$

In diesem Grenzfall liegen beide Arnold-Bogdanov-Takens-Punkte aufeinander, und somit ändert sich die Orientierung der transkritischen Bifurkation nicht (vgl. Gl. (5.11)). Ebenso gibt es die maximale Hopf-Frequenz der verschiedenen Zweige nicht mehr. In Abbildung 5.2 ist eine Gegenüberstellung beider Lösungen, der allgemeinen (Gl. (5.9)) und der für $\lambda \nearrow 0$ (Gl. (5.13)) zu sehen. Die grauen Flächen markieren die jeweiligen Kontrollgebiete. Die Größe der Kontrollgebiete unterscheidet sich dramatisch. Die Parameter sind so gewählt, dass sie denen des Experiments entsprechen. Zwar lassen sich aus dem Grenzfall $\lambda \nearrow 0$ qualitative Eigenschaften ableiten, für eine quantitative Vorhersage in Experimenten oder konkreten Anwendungen reicht er nicht aus.

5.2 Ursprung der kontrollinduzierten Orbits

Hopf-Bifurkation des trivialen Fixpunkts

Nicht nur die Sattel-Knoten-Bifurkation der kontrollinduzierten Orbits kann eine mögliche Quelle stabiler Orbits sein (vgl. Kap. 2.2.1). Auch eine superkritische Hopf-Bifurkation des trivialen Fixpunktes bringt einen stabilen Orbit hervor, der durch die zuvor behandelte transkritische Bifurkation seine Stabilität an den Pyragas-Orbit übergibt. Hier werden die Ergebnisse aus Kapitel 2.2.1 in der Schreibweise mit κ_x und κ_y zusammengefasst.

Das Paar komplex konjugierter Floquet-Exponenten ist am Bifurkationspunkt rein imaginär. Eine Linearisierung der komplexen Bewegungsgleichung (5.1) um den Ursprung liefert mit dem Ansatz $\Lambda\tau = i\phi_i$

$$i\phi_i = \lambda\tau + i\tau - (\kappa_x + i\kappa_y)(1 - \exp(-i\phi_i)) \quad (5.14)$$

Der Verlauf der Bifurkationslinie in der κ_x - κ_y -Ebene ergibt sich durch eine Aufspaltung in Real- und Imaginärteil. Dabei lässt sich die reskalierte Hopf-Frequenz $\phi_i = \Omega_i\tau$ als Bahnparameter verwenden:

$$\kappa_x = \frac{\sin \phi_i}{(1 - \cos \phi_i)} \cdot \frac{(\tau - \phi_i)}{2} + \frac{\lambda\tau}{2} \quad (5.15a)$$

$$\kappa_y = \frac{(\tau - \phi_i)}{2} - \frac{\sin \phi_i}{(1 - \cos \phi_i)} \cdot \frac{\lambda\tau}{2} \quad (5.15b)$$

Diese Gleichungen enthalten keine Aussage darüber, ob eine sub- oder superkritische Bifurkation vorliegt. Um derartige Aussagen zu erhalten, ist eine Normalformanalyse notwendig. Diese ist in der Veröffentlichung [Just u. a., 2007] zu finden. Entscheidend für die Art der Bifurkation ist der kubische Term, genauer sein Realteil:

$$c_{re} = 1 + \kappa_x (\cos \phi_i - \gamma \sin \phi_i) + \kappa_y (\sin \phi_i + \gamma \cos \phi_i) \quad (5.16)$$

Ist der Realteil negativ, liegt eine superkritische Hopf-Bifurkation vor, ist er positiv eine subkritische. Eine Kodimension-zwei-Bifurkation liegt vor, wenn der Realteil c_{re} verschwindet. Dann gibt es einen Übergang von einer superkritischen zu einer subkritischen Hopf-Bifurkation oder umgekehrt. Das ist der Fall, wenn die Hopf-Bifurkation mit der Sattel-Knoten-Bifurkation kollidiert.

Sattel-Knoten-Bifurkation der kontrollinduzierten Orbits

Neben einer Hopf-Bifurkation des trivialen Fixpunkts kann eine Sattel-Knoten-Bifurkation den benötigten stabilen Orbit hervorbringen. Wie in Kapitel 2.2.1 ausgeführt, tritt eine Sattel-Knoten-Bifurkation auf, wenn zusätzlich zur Gleichung (5.2b) deren Ableitung nach Ω_i erfüllt ist ($\phi_i = \Omega_i\tau$):

$$0 = 1 + \kappa_x (\cos \phi_i - \gamma \sin \phi_i) + \kappa_y (\sin \phi_i + \gamma \cos \phi_i) \quad (5.17)$$

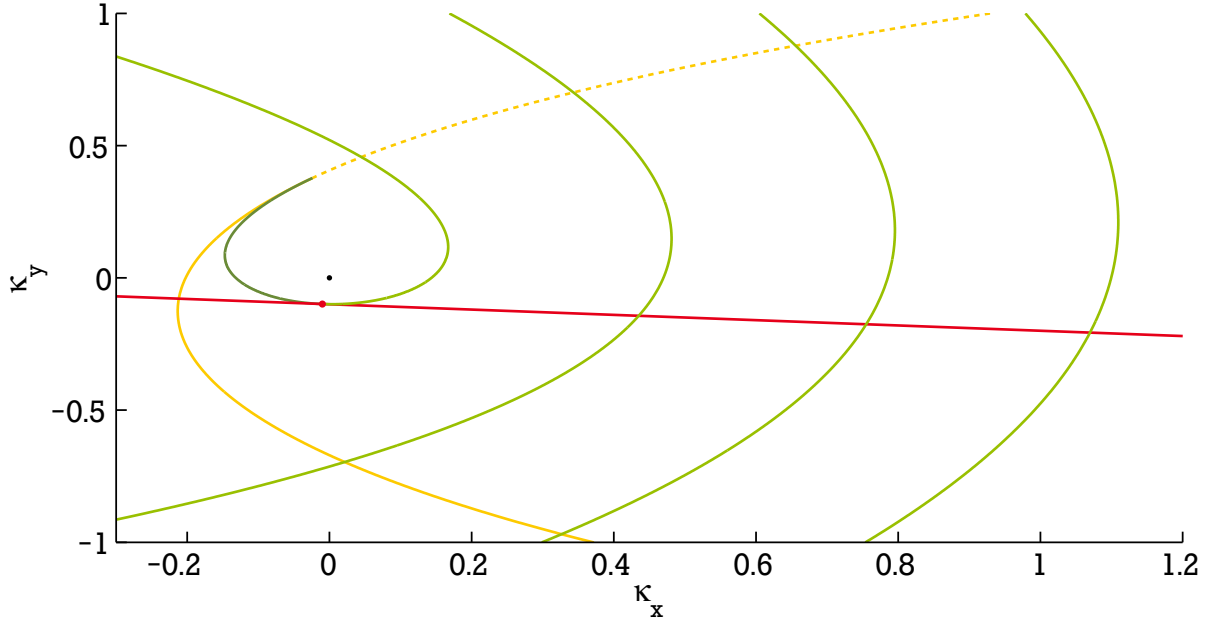


Abbildung 5.3.: Wechsel der Hopf-Bifurkation des trivialen Fixpunkts von subkritisch (gelb durchgezogen) nach superkritisch (gelb gestrichelt). Grün: Sattel-Knoten-Bifurkation, Radius größer als der des Pyragas-Orbits (hellgrün), Radius kleiner als der des Pyragas-Orbits (dunkelgrün). Roter Punkt: Durchstoßpunkt der Sattel-Knoten-Bifurkation durch den Pyragas-Orbit. Schwarzer Punkt: unkontrolliertes System ($\lambda = -0.15$; $\gamma = 10$).

Aus den Bedingungen der Sattel-Knoten-Bifurkation lassen sich Gleichungen für die reskalierten Kontrollamplituden κ_x und κ_y ableiten, die von der reskalierten Orbitfrequenz ϕ_i als Bahnparameter abhängen.

$$\kappa_x = \frac{1 + (\sin \phi_i + \gamma \cos \phi_i) \kappa_y}{(\gamma \sin \phi_i - \cos \phi_i)} \quad (5.18a)$$

$$\kappa_y = - \frac{(\phi_i - (1 - \gamma \lambda) \tau) (\gamma \sin \phi_i - \cos \phi_i) + \sin \phi_i - \gamma (1 - \cos \phi_i)}{(1 + \gamma^2) (1 - \cos \phi_i)} \quad (5.18b)$$

An dieser Form ist zu erkennen, dass die Lage der Sattel-Knoten-Bifurkationen unter der Bedingung der Verzögerungszeit³ unabhängig von λ ist. Allein die Radiusbedingung (5.2a) entscheidet darüber, für welche κ_x - und κ_y -Werte die Lösung existiert.

An der Gleichung (5.18) kann ein weiterer interessanter Grenzfall betrachtet werden. In diesem Fall passiert die Sattel-Knoten-Bifurkation den Pyragas-Orbit. Um Genaueres zu erfahren reicht eine Entwicklung der Gleichungen (5.18) um $\phi_i = 2\pi$ bis zur ersten nicht-verschwindenden Ordnung. Sie liefert eine eindeutige Bedingung für κ_x und κ_y :

$$\kappa_x = -1 - \gamma \kappa_y \quad (5.19a)$$

$$\kappa_y = \frac{-\gamma}{1 + \gamma^2} \quad (5.19b)$$

Der Durchstoßpunkt liegt direkt auf der transkritischen Bifurkationslinie (vgl. Abb. 5.3).

³ $\tau = n \frac{2\pi}{\Omega_p}$

Hopf-Bifurkation der kontrollinduzierten Orbits

Die letzte mögliche der lokalen Kodimension-eins-Bifurkationen ist die Hopf-Bifurkation der kontrollinduzierten Orbits. Sie wurde bereits in den Experimenten gefunden. Das Vorgehen ist analog zum Fall der Hopf-Bifurkation des Pyragas-Orbits, mit dem Unterschied, dass ϕ_i keinen festen Wert besitzt. Das Gleichungssystem ist somit unterbestimmt. Mit der Hopf-Bifurkationsfrequenz ϕ_h als Bahnparameter ist es möglich, eine implizite Funktion für ϕ_i aufzustellen, die eine Vielzahl von Lösungen besitzt. Die normierten Kontrollamplituden κ_x und κ_y hängen dann sowohl von ϕ_i als auch von ϕ_h ab. Auf die Darstellung der Bestimmungsgleichungen wird hier verzichtet, da sie sehr umfangreich sind und wenig zum Verständnis beitragen. Sie sind im Anhang B.3 zu finden. Die komplizierte Form der analytischen Lösung lässt nur wenig relevante Information erkennen. Eine graphische Darstellung ist hier aufschlussreicher. Einige der numerisch auswerteten Lösungszweige sind in Abbildung 5.4 dargestellt.

Wesentlich einfacher ist der Grenzfall $\phi_h \rightarrow 0$, bei dem es zu Kollisionen mit der Sattel-Knoten Bifurkation bzw. mit der transkritischen Bifurkation kommt. Die Kollisionspunkte sind die oben erwähnten Arnold-Bogdanov-Takens-Punkte. Als Bedingung für diese Punkte genügt eine einfache Entwicklung des charakteristischen Polynoms nach der Hopf-Frequenz ϕ_h bis zur quadratischen Ordnung:

$$\begin{aligned} 0 &= -2R_i^2 \left(1 + \kappa_x (\cos \phi_i - \gamma \sin \phi_i) + \kappa_y (\sin \phi_i + \gamma \cos \phi_i) \right) i\Omega_h \\ &\quad - \left((\kappa_x + \cos \phi_i)^2 + (\kappa_y + \sin \phi_i)^2 + \tau R_i^2 (\kappa_x (\cos \phi_i - \gamma \sin \phi_i) + \kappa_y (\sin \phi_i + \gamma \cos \phi_i)) \right) \Omega_h^2 \\ &\quad + \mathcal{O}(\Omega_h^3) \end{aligned} \quad (5.20)$$

Der lineare Term liefert die gleiche Bedingung wie für die Sattel-Knoten Bifurkation. Wenn der Vorfaktor des quadratischen Terms verschwindet, liegt die benötigte dreifache Nullstelle des charakteristischen Polynoms vor – eine doppelte von der Kodimension-zwei-Bifurkation und die Goldstone-Mode. Der quadratische Term lässt sich mittels der Bedingung für die Sattel-Knoten-Bifurkation zu

$$\tau R_i^2 = (\kappa_x + \cos \phi_i)^2 + (\kappa_y + \sin \phi_i)^2 \quad (5.21)$$

vereinfachen. Diese Form sieht so aus, als ob alle Arnold-Bogdanov-Takens-Punkte auf einem Kreis liegen. R_i^2 ist jedoch eine Funktion von κ_x , κ_y und ϕ_i (vgl. Gl. (5.2a)). Dennoch befinden sich alle bis auf zwei auf einem kreisförmigen Gebilde (vgl. Abb. 5.4). Das lässt sich damit begründen, dass sich die verschiedenen Arnold-Bogdanov-Takens-Punkte des oberen bzw. des unteren Halbkreises jeweils um ca. 2π in ϕ_i unterscheiden. Die Arnold-Bogdanov-Takens-Punkte des oberen und des unteren Halbkreises haben paarweise eine Differenz von ca. π in ϕ_i . Aus theoretischer Sicht ist es interessant, dass die Anzahl der Arnold-Bogdanov-Takens-Punkte aus der Form der Bestimmungsgleichungen bewiesen werden kann. Das ist ein eindeutiger Vorteil gegenüber der rein numerischen Bestimmung, bei der es nie die Sicherheit gibt, alle Lösungen gefunden zu haben.

Für den Spezialfall $\phi_i \rightarrow 2\pi$ ergibt die Gleichung (5.21) dieselbe Bedingung wie für die Kollision der Hopf-Bifurkation des Pyragas-Orbits mit der transkritischen Bifurkation (Gl. (5.11)). Wie im entsprechenden Abschnitt erwähnt, handelt es sich dabei um zwei symmetrieentartete Arnold-Bogdanov-Takens-Punkte.

In Abbildung 5.4 ist der ganze Sachverhalt illustriert. Es sind nur wenige Sattel-Knoten-Bifurkationslinien und Hopf-Bifurkationslinien der kontrollinduzierten Orbits dargestellt, da sonst das Bild zu unübersichtlich würde. Die blauen Punkte sind sämtliche Arnold-Bogdanov-Takens-Punkte, die paarweise auftreten. Es liegen immer zwei dieser Punkte auf einem Zweig der Sattel-Knoten-Bifurkationslinie (grün). Wie bei der transkritischen Bifurkation (rot) ändert sich das Verhalten der Sattel-Knoten-Bifurkation zwischen den Arnold-Bogdanov-Takens-Punkten, was durch eine gestrichelte Linie angedeutet wird. Näher wird darauf im Kapitel 5.3 eingegangen. Diese Arnold-Bogdanov-Takens-Punkte werden durch eine Hopf-Bifurkationslinie verbunden (violett). Eine Ausnahme bildet der Zweig, bei dem die Sattel-Knoten-Bifurkation die transkritische Bifurkation schneidet. Vom Arnold-Bogdanov-Takens-Punkt, der näher an der transkritischen Bifurkation liegt, geht eine Hopf-Bifurkation aus, die oberhalb des Pyragas-Orbits

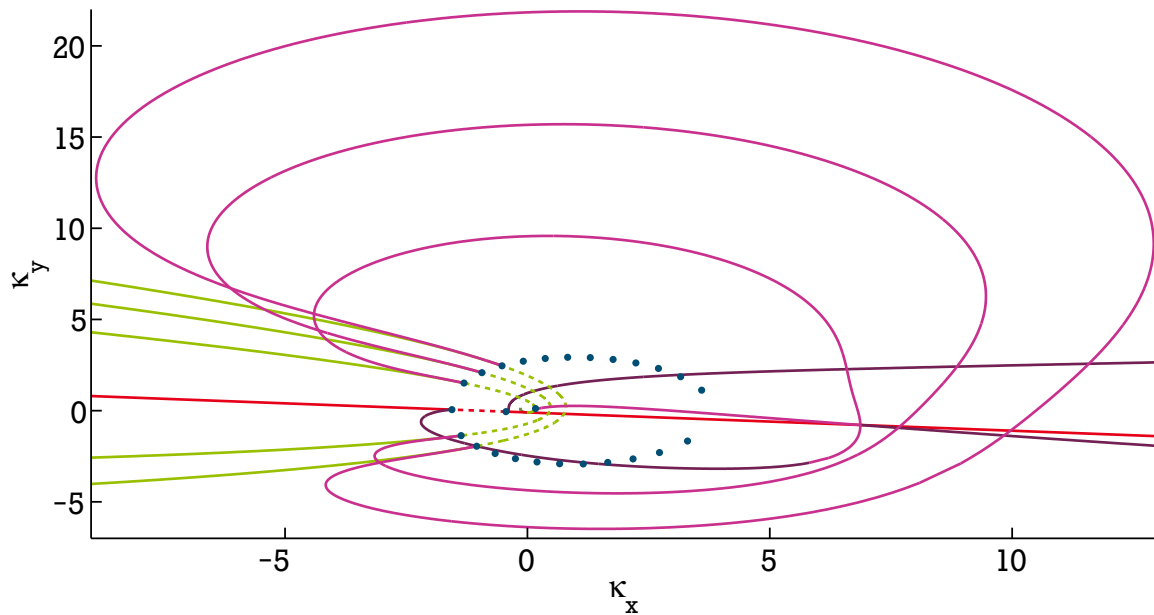


Abbildung 5.4.: Dieses Bild zeigt alle vorhandenen Arnold-Bogdanov-Takens-Punkte. Alle auf dem kreisförmigen Gebilde liegenden Punkte sind paarweise durch eine Hopf-Bifurkationslinie der kontrollinduzierten Orbits verbunden. Für die violetten Linien hat die Hopf-Bifurkation einen größeren Radius der des Pyragas-Orbits, für die dunkelvioletten einen kleineren. Die beiden andern Arnold-Bogdanov-Takens-Punkte sind nicht miteinander verbunden. Die Hopf-Bifurkationslinie des Punkts auf der Sattel-Knoten-Bifurkation kollidiert an einer Hopf-Bifurkation des trivialen Fixpunkts mit diesem, die des anderen endet bei einem endlichen Radius. Neben der transkritischen Bifurkation (rot) sind ein paar ausgewählte Sattel-Knoten-Bifurkationen (grün) zu sehen. ($\lambda = -0.1$; $\gamma = 10$)

liegt. Sie schneidet die transkritische Bifurkationslinie am gleichem Punkt, wie die Hopf-Bifurkation des Pyragas-Orbits, um dann unterhalb dieses Orbits in einer Hopf-Bifurkation mit dem trivialen Fixpunkt zu kollidieren. An diesem Kollisionspunkt kreuzen zwei Hopf-Bifurkationslinien des trivialen Fixpunkts. Aus Konsistenzgründen müsste dort auch die homokline Bifurkationslinie enden. Die vom anderen auf diesem Zweig liegenden Arnold-Bogdanov-Takens-Punkt ausgehende Hopf-Bifurkationslinie findet ihren Partner auf der transkritischen Bifurkationslinie an dem Punkt, der auch auf dem kreisförmigen Gebilde liegt. Die vom zweiten auf der transkritischen Bifurkationslinie liegenden Arnold-Bogdanov-Takens-Punkt ausgehende Hopf-Bifurkation liegt komplett unterhalb des Pyragas-Orbits und endet bei einem endlichen Radius. An dieser Stelle liegt keine hier behandelte Bifurkation vor, sodass nur eine globale Bifurkation in Frage kommt. Eine weiterführende Analyse ist jedoch weniger interessant, da sie für die Experimente keine Relevanz hat.

5.3 Das Zusammenspiel der Bifurkationen

Nachdem die wichtigsten Bifurkationen besprochen wurden, bleibt die Frage, welche Szenarien diese Bifurkationen hervorbringen. Dabei lohnt ein Blick auf die Gesamtheit der zuvor gewonnenen Ergebnisse. Das Bild auf der Titelseite dieser Arbeit zeigt einen Ausschnitt der κ_x - κ_y -Ebene mit allen analytisch gefundenen Bifurkationen. Fast alle dieser Bifurkationen sind für die Kontrolle uninteressant, da sie zum einen nicht im direkten Zusammenhang mit der Stabilisierung des Pyragas-Orbits stehen, zum anderen, weil die betreffenden Orbits oft deutlich mehr als eine instabile Richtung aufweisen. Sie haben also kei-

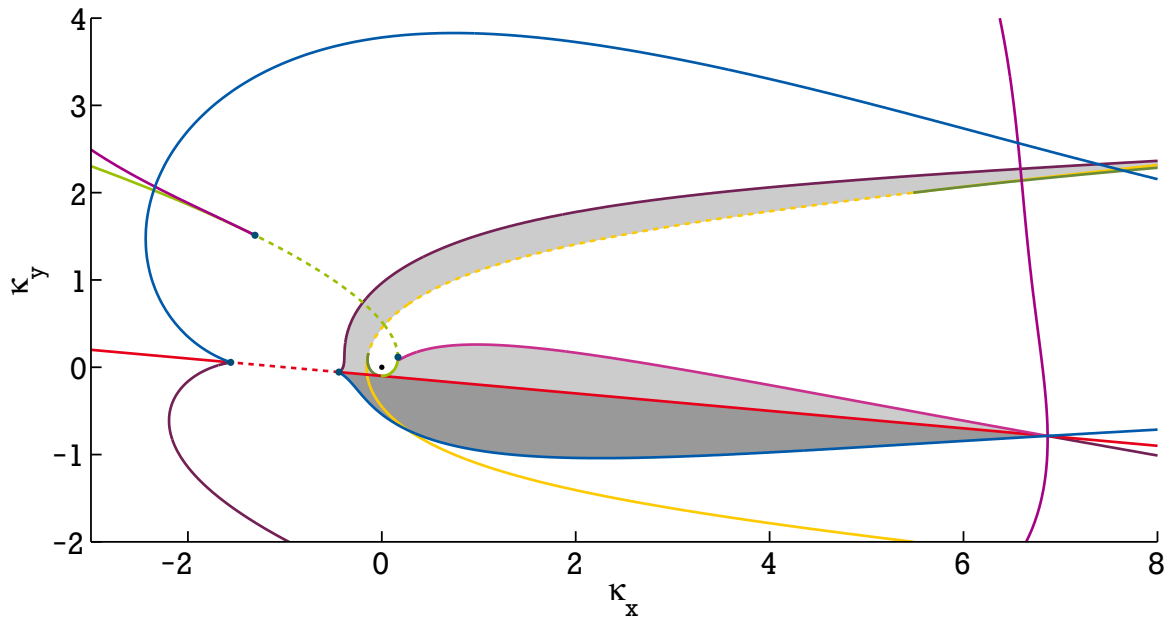


Abbildung 5.5.: Alle für die Kontrolle wesentlichen Bifurkationen. Rot: transkritische Bifurkation. Blau: Hopf-Bifurkation des Pyragas-Orbits. Grün: Sattel-Knoten-Bifurkation, hellgrün oberhalb des Pyragas-Orbits, dunkelgrün unterhalb. Violett: Hopf-Bifurkation der kontrollinduzierten Orbits, hellviolett oberhalb des Pyragas-Orbits, dunkelviolett unterhalb. Gelb: Hopf-Bifurkation des trivialen Fixpunkts, gestrichelt: superkritisch, durchgezogen: subkritisch. Dunkelgraue Fläche: Kontrollgebiet. Hellgraue Flächen: Bereich stabiler kontrollinduzierter periodischer Orbits. ($\lambda = -0, 1$; $\gamma = 10$)

ne experimentelle Relevanz. Eine Reduktion auf die für die Kontrolle wesentlichen Bifurkationen zeigt Abbildung 5.5.

Der schwarze Punkt markiert den Ursprung der κ_x - κ_y -Ebene, an dem das unkontrollierte System vorliegt. Wie zuvor ist die transkritische Bifurkation rot dargestellt. Im gestrichelten Bereich nimmt die Anzahl der instabilen Eigenwerte beim Passieren der Bifurkationslinie von oben nach unten zu. Bei den durchgezogenen Linien ist es gerade umgekehrt. Die blaue Linie ist die Hopf-Bifurkation des Pyragas-Orbits. Wird sie vom Ursprung kommend überschritten, bildet sich ein komplex konjugierte Paar von Eigenwerten und der Torus entsteht. Zwei der stabilen Mannigfaltigkeiten des Pyragas-Orbits werden dabei instabil. Der Bereich, in dem der Pyragas-Orbit stabil ist, liegt unterhalb der transkritischen Bifurkation in dem Abschnitt, der durch die Hopf-Bifurkation eingeschlossen ist. Eine Sattel-Knoten-Bifurkation kann bei einem größeren oder kleineren Radius als dem des Pyragas-Orbits auftreten. Radial vom Ursprung aus gesehen, liegen die beiden durch die Bifurkation entstehenden Orbits hinter der Bifurkationslinie. Zwischen den auf der Sattel-Knoten-Bifurkationslinie liegenden Arnold-Bogdanov-Takens-Punkten (blaue Punkte) entstehen zwei instabile Orbits. In diesem grün gestrichelten Abschnitt besitzt der eine Orbit eine instabile Mannigfaltigkeit, der andere zwei. Außerhalb dieses Abschnitts entstehen je ein stabiler und ein instabiler Orbit (durchgezogene Linie). Von den Arnold-Bogdanov-Takens-Punkten gehen die Hopf-Bifurkationen der kontrollinduzierten Orbits aus. Die letzte Bifurkationslinie ist die der Hopf-Bifurkation des trivialen Fixpunkts. Die superkritische Hopf-Bifurkation entspricht der gelben gestrichelten Linie. Vom Ursprung aus gesehen, liegt der stabile periodische Orbit jenseits dieser Bifurkationslinie. Bei der subkritischen Hopf-Bifurkation (gelbe durchgezogene Linie) liegt der instabile periodische Orbit diesseits der Bifurkationslinie. An den Punkten zwischen der super- und der subkritischen Bifurkation endet die Sattel-Knoten-Bifurkation.

Aus diesen Bifurkationen ergeben sich vier mögliche Szenarien, die zu einer Stabilisierung des Pyragas-Orbits führen können. Diese vier Szenarien sind in Abbildung 5.6 zu sehen und stellen Schnitte durch die κ_x - κ_y -Ebene dar. Dabei wurde $\kappa_x + i\kappa_y = \kappa \exp(i\beta)$ verwendet. Für verschiedene feste Werte des Winkels β wurden die Radien der kontrollinduzierten Orbits und der Radius des Pyragas-Orbits R_p über κ aufgetragen. Die Stabilität ist durch gestrichelte (instabil) und durchgezogene Linien (stabil) gekennzeichnet. In Abbildung 5.6 a liegt die Sattel-Knoten-Bifurkation (grün) knapp oberhalb des Pyragas-Orbits. Ihr stabiler Zweig wandert bei Erhöhung der Kontrollamplitude κ auf den Pyragas-Orbit zu, bis er ihm in der transkritischen Bifurkation (rot) die Stabilität übergibt und selbst instabil wird. Bei weiterer Erhöhung der Kontrollamplitude κ endet der nun instabile Orbit in einer subkritischen Hopf-Bifurkation des trivialen Fixpunkts (gelb). Der andere Zweig der Sattel-Knoten-Bifurkation ist instabil. Bei Erhöhung der Kontrollamplitude wird der Radius dieses Orbits zunächst größer, dann jedoch wieder geringer. Er kreuzt den Pyragas-Orbit und wird in einer weiteren Hopf-Bifurkation des trivialen Fixpunkts vernichtet. Das „Kreuzen“ des Pyragas-Orbits ohne das eine Bifurkation vorliegt, scheint zunächst einen Widerspruch darzustellen und führt in der Tat häufig zu Missverständnissen. Diese Überschneidung der beiden Orbits kommt durch die Projektion des unendlich-dimensionalen Phasenraums zustande. Wird neben dem Radius auch die Orbit-Frequenz berücksichtigt, wird ersichtlich, dass sich beide Orbits in unterschiedlichen Teilen des Phasenraums aufhalten.

Abbildung 5.6 c zeigt ein ähnliches Bild, mit dem Unterschied, dass die Sattel-Knoten-Bifurkation unterhalb des Pyragas-Orbits liegt. Dementsprechend wird der Radius ihres stabilen Zweigs bei Erhöhung der Kontrollamplitude κ größer, bis er in der transkritischen Bifurkation seine Stabilität an den Pyragas-Orbit übergibt. Beide Szenarien lassen sich durch Änderung des Winkels β ineinander überführen. Der Sonderfall, dass die Sattel-Knoten-Bifurkation den Pyragas-Orbit passiert, ist in Abbildung 5.6 b gezeigt. In diesem entarteten Fall liegen Sattel-Knoten- und transkritische Bifurkation aufeinander. Der stabile Zweig der Sattel-Knoten-Bifurkation übergibt direkt beim Entstehen seine Stabilität an den Pyragas-Orbit. Der instabile Zweig der Sattel-Knoten-Bifurkation verhält sich wie in den zuvor beschriebenen Szenarien.

Das letzte Szenario, Abbildung 5.6 d, tritt auf, nachdem die Sattel-Knoten-Bifurkation mit der Hopf-Bifurkation des trivialen Fixpunkts kollidiert ist. Bei dieser Kollision wird die Hopf-Bifurkation superkritisch. Der so entstandene stabile periodische Orbit kann dann seine Stabilität durch die transkritische Bifurkation an den Pyragas-Orbit übergeben. Der dadurch instabil gewordene Orbit verhält sich bei anwachsender Kontrollamplitude ähnlich wie die instabilen Zweige der Sattel-Knoten-Bifurkation in den vorausgegangenen Szenarien.

Für alle vier Szenarien wird die Ausdehnung des Kontrollintervalls auf der rechten Seite durch die Hopf-Bifurkation des Pyragas-Orbits (blau) beschränkt.

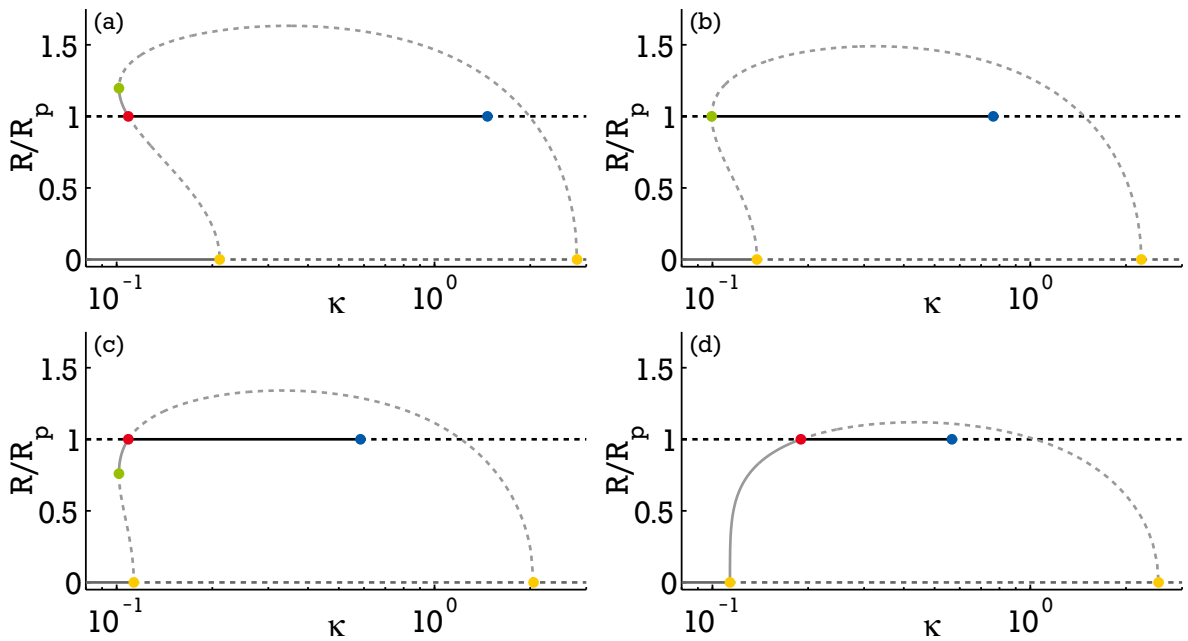
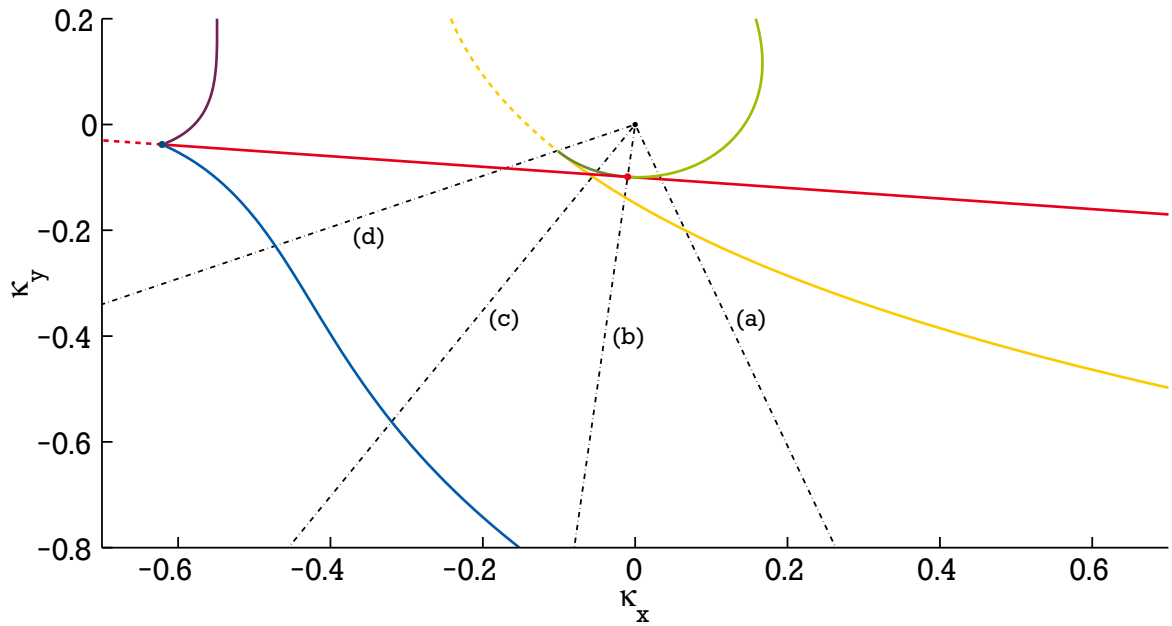


Abbildung 5.6.: Oben: κ_x - κ_y -Ebene mit den Schnitten der vier möglichen Szenarien (strich-punktiert). Die Schnitte durch die κ_x - κ_y -Ebene sind für die Winkel (a) $\beta = 0.9\beta_c$, (b) $\beta = \beta_c \approx -1.67$, (c) $\beta = 1.1\beta_c$ und (d) $\beta = 1.25\beta_c$ dargestellt. Unten: Vier Szenarien, unter denen es zur Stabilisierung des Pyragas-Orbits (schwarz) kommt. Der daran beteiligte kontrollinduzierte Orbit ist hellgrau, der triviale Fixpunkt dunkelgrau eingefärbt. Für eine durchgezogene Linie ist der jeweilige Zustand stabil, für eine gestrichelte instabil. Die Bifurkationen werden durch die farbigen Punkte markiert. Rot: transkritische Bifurkation. Blau: Hopf-Bifurkation des Pyragas-Orbits. Grün: Sattel-Knoten-Bifurkation. Gelb: Hopf-Bifurkation des trivialen Fixpunkts. ($\lambda = -0,03$; $\gamma = 10$)

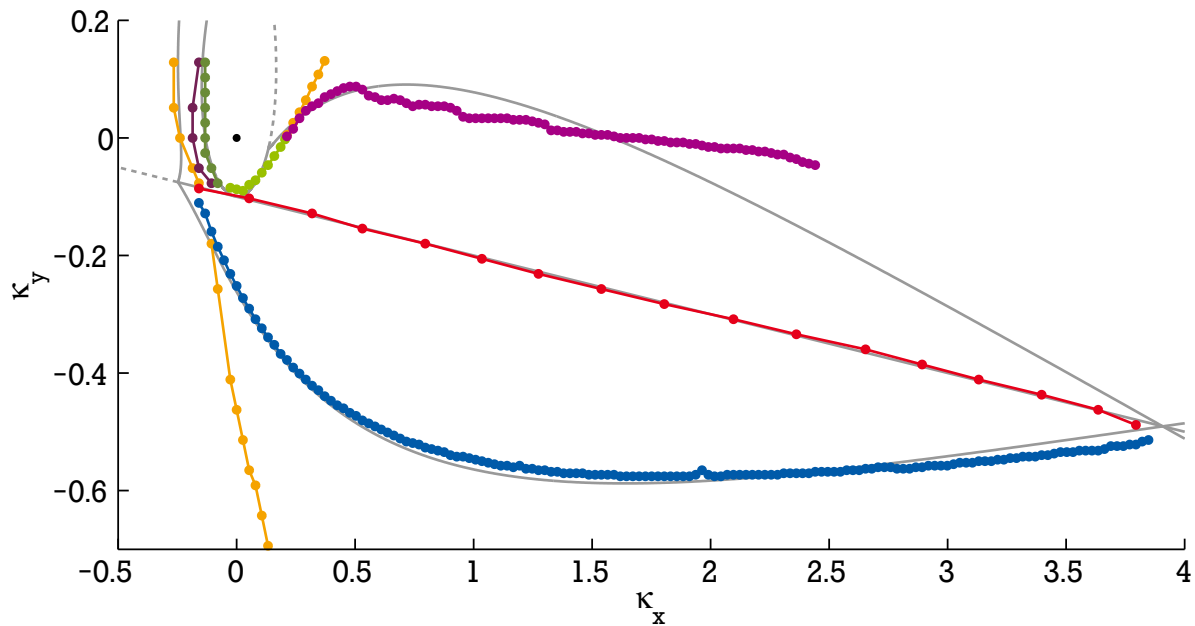


Abbildung 5.7.: Von Hand ausgemessenes Bifurkationsdiagramm. Rot: transkritische Bifurkation. Blau: Hopf-Bifurkation des Pyragas-Orbits. Grün: Sattel-Knoten-Bifurkation, dunkelgrün: Radius kleiner als der des Pyragas-Orbits, hellgrün: Radius größer als der des Pyragas-Orbits. Violett: Hopf-Bifurkation der kontrollinduzierten Orbits. Orange: homokline Bifurkation. Graue Linien: Vorhersage meiner Theorie

5.4 Vergleich der Theorie mit Experiment und Numerik

Die Motivation des Kapitels „Theorie“ war die dramatische Diskrepanz zwischen den experimentellen Ergebnissen und der bis dahin bekannten theoretischen Vorhersage. Auch in den numerischen Simulationen sind Abweichungen aufgefallen. An dieser Stelle soll ein Vergleich der von mir ausgearbeiteten analytischen Vorhersage mit den experimentellen und numerischen Ergebnissen angestellt werden.

Abbildung 5.8 zeigt Simulationen des Stuart-Landau-Oszillators (oben) und des van-der-Pol-Oszillators (unten). Die Windungszahl N spiegelt sich in den Farben wieder. Die rote Fläche ist das Kontrollgebiet. Ändert sich die Windungszahl, so liegt eine Bifurkation des Pyragas-Orbits vor. Werden die Simulationsergebnisse des Stuart-Landau-Oszillators mit der von mir erarbeitete Theorie (schwarze Linien) verglichen, so liegen bei beiden die Bifurkationslinien im Rahmen der numerischen Genauigkeit aufeinander. Es wird explizit darauf hingewiesen, dass hierbei keine Fitparameter verwendet wurden. Neben dem Verlauf der Bifurkationslinien wird auch die Richtung der transkritischen Bifurkation von der Theorie richtig wiedergegeben. Erstaunlich ist die Vorhersagequalität bei den Simulationen des van-der-Pol-Oszillators. Sein dynamisches Verhalten entspricht nur in der Näherung der Normalformanalyse der des Stuart-Landau-Oszillators. Wie in Kapitel 3.3 wurden die nichtlineare Frequenzverstimmung γ und die Normierung der Kontrollamplituden aus der transkritischen Bifurkation bestimmt. Dennoch liegen auch hier die Bifurkationslinien der Theorie und der Simulationen exakt aufeinander. Auch die Umkehrung der transkritischen Bifurkation wird von der Theorie gut reproduziert.

Der eigentliche Schwerpunkt dieser Arbeit liegt bei den Experimenten. In Abbildung 5.7 werden die analytischen Ergebnisse mit den gemessenen Bifurkationslinien verglichen. Wie im Kapitel 4.2 wurde hier nur die Normierung der Kontrollamplituden mit Hilfe der transkritischen Bifurkation angepasst. Umso erstaunlicher ist die gute Übereinstimmung aller Bifurkationslinien und des Kontrollgebiets. Selbst die schwierig zu vermessenden Hopf-Bifurkationen der kontrollinduzierten Orbits (violett) lassen sich qualitativ vorhersagen.

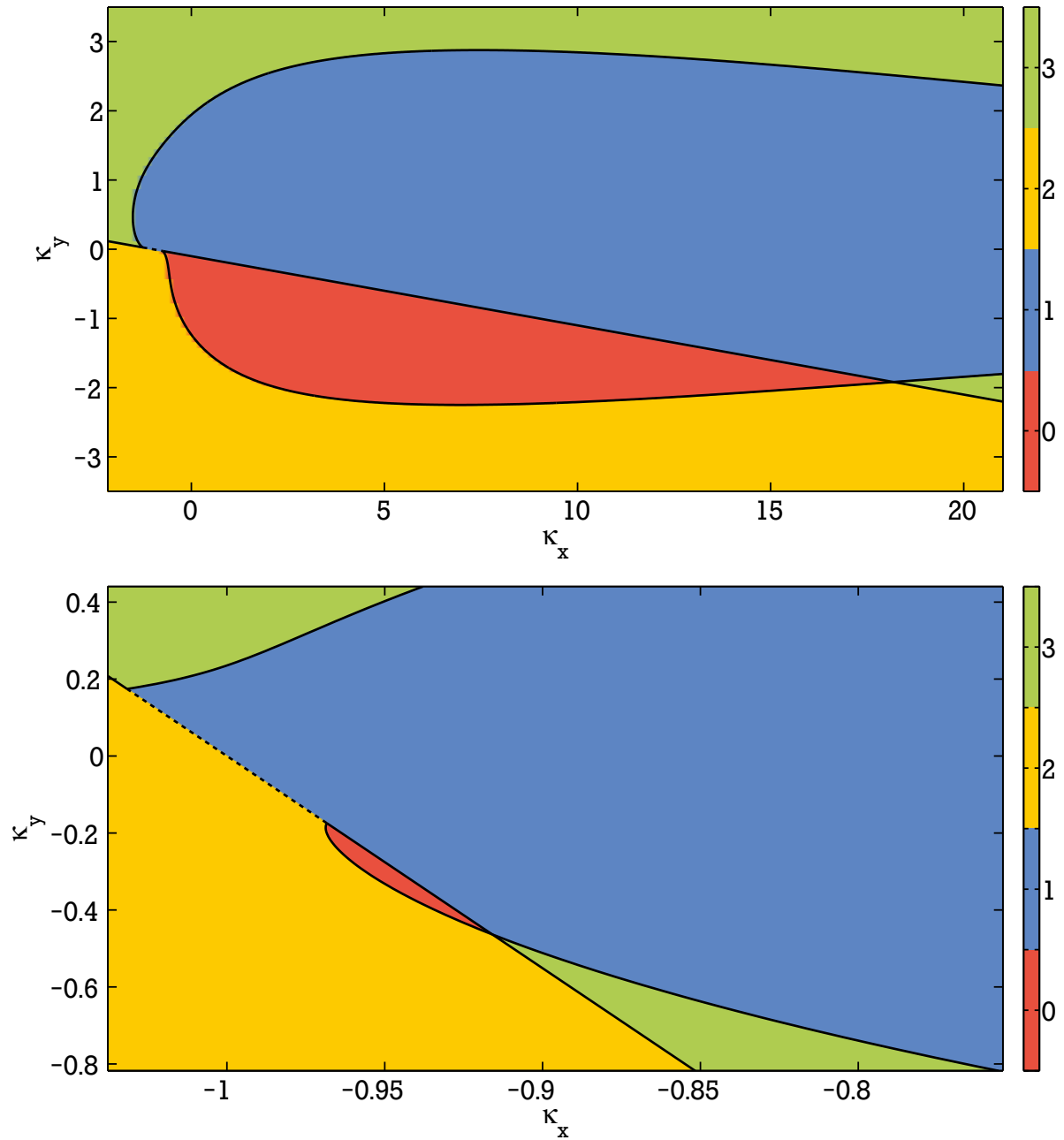


Abbildung 5.8.: κ_x - κ_y -Ebenen des Stuart-Landau-Oszillators (oben, $\lambda = -0,01$; $\gamma = 10$) und des van-der-Pol-Oszillators (unten, $\epsilon = -0.005$). Die Windungszahl \mathcal{N} ist farblich kodiert. $\Delta\mathcal{N} = \pm 1$: transkritische Bifurkation. $\Delta\mathcal{N} = \pm 2$: Hopf-Bifurkation. Schwarze Linien: Vorhersage meiner Theorie



6 Resümee

Lange Zeit wurde angenommen, dass sich mit zeitverzögerten Rückkopplungskontrolle keine torsionsfreien periodischen Orbits stabilisieren lassen. Vor einiger Zeit wurde erkannt, dass diese Einschränkung nur für nicht-autonome Systeme gilt. Dennoch wurde erst 2007 am Beispiel der Hopf-Normalform eine Möglichkeit aufgezeigt, wie der torsionsfreie periodische Orbit eines autonomen Systems stabilisiert werden kann [Fiedler u. a., 2007].

Ich habe in dieser Arbeit erstmals in Experimenten nachgewiesen, dass mit der zeitverzögerten Rückkopplungskontrolle torsionsfreie periodische Orbits autonomer Systeme erfolgreich stabilisiert werden können. Um die Experimente vorzubereiten, wurden der van-der-Pol-Oszillator und der Stuart-Landau-Oszillator in numerischen Simulationen untersucht. Neben der in [Fiedler u. a., 2007] vorgeschlagenen Drehmatrixankopplung wurden bei den Simulationen des van-der-Pol-Oszillators auch andere Ankopplungen ausprobiert. Es hat sich dabei herausgestellt, dass der Erfolg der Kontrolle nicht von der speziellen Ankopplung abhängt. Obwohl sich der van-der-Pol-Oszillator kontrollieren lässt, wurde der Stuart-Landau-Oszillator experimentell umgesetzt. Beim van-der-Pol-Oszillator traten winzige Kontrollgebiete nur für einen sehr kleinen und experimentell schwierig umzusetzenden Parameterbereich auf. Der Stuart-Landau-Oszillator zeigte hingegen große Kontrollgebiete im gesamten untersuchten Parameterbereich. Ein Vergleich der numerisch bestimmten Grenzen des Kontrollgebiets mit den theoretischen Vorhersagen zeigte Diskrepanzen.

Zur experimentellen Umsetzung wurden mehrere elektronische Schaltungen entworfen, darunter der Stuart-Landau-Oszillator, zwei Zeitverzögerungsschaltungen und eine Steuerschaltung. Dabei kam sowohl Analog- als auch Digitaltechnik zum Einsatz. Wichtigstes Ergebnis dieser Untersuchungen war, dass sich der torsionsfreie instabile Orbit kontrollieren lässt. Außerdem wurden alle experimentell beobachteten Bifurkationslinien vermessen. Neben den erwarteten Bifurkationen [Just u. a., 2007] wurden weitere gefunden, darunter auch eine globale Bifurkation, die homokline Bifurkation. Diese Ergebnisse täuschten nicht darüber hinweg, dass das Kontrollgebiet um eine Größenordnung kleiner ist als erwartet. Diese dramatische Diskrepanz zwischen Experiment und Theorie hat mich veranlasst, eine genaue analytische Betrachtung durchzuführen.

Mit Hilfe von Bifurkationsanalysen ist es gelungen, Experimente und Theorie in Einklang zu bringen. Aus experimenteller Sicht steht zwar das Kontrollgebiet im Vordergrund, dennoch habe ich sämtliche im Experiment auftretenden lokalen Bifurkationen analytisch untersucht. Die Ergebnisse zeigen ein nahezu vollständiges Bild der Vorgänge, so wie sie auch im Experiment gefunden wurden.

Trotz der umfangreichen Abhandlung bleiben noch Fragen offen. Die Experimente sind als *prove of concept* zu verstehen. Eine große Herausforderung besteht darin, die in dieser Arbeit gewonnenen Erkenntnisse auf höherdimensionale Systeme zu übertragen. Das ist ein notwendiger Schritt, um in Zukunft technische Anwendungen realisieren zu können. Ein anderer interessanter Punkt wäre die analytische Untersuchung globaler Bifurkationen, wie zum Beispiel der homoklinen Bifurkation. So ließe sich klären, inwieweit sie Einfluss auf die Kontrolleigenschaften und Einzugsbereiche haben.

Ungeachtet dieser offenen Fragen zeigen die hier präsentierten Experimente, dass sich torsionsfreie Orbits mit Hilfe zeitverzögerter Rückkopplung erfolgreich kontrollieren lassen.



Teil III.

Anhang



A Experiment

A.1 van-der-Pol

In Abbildung A.1 ist der schematische Aufbau des Schwingkreises skizziert. Der van-der-Pol-Oszillator (schwarz) besteht aus einem LCR-Parallelschwingkreis, wobei der ohmsche Widerstand R durch eine kubische Nichtlinearität NL ersetzt ist. Die entscheidenden Größen, die das Systemverhalten widerspiegeln, sind die Spannung U , die über den Kondensator C abfällt, und der Strom I , der durch die Spule L fließt. Es gibt zwei Arten der Ankopplung von Kontrollkräften an diesen Schwingkreis. Zum einen kann über einen Strom I_k angekoppelt werden (rot), zum anderen über eine Spannung U_k (blau). Aus der Schaltung kann die Differenzialgleichungssystem

$$C \dot{U} = -I - I_{NL} + I_k \quad (\text{A.1a})$$

$$L \dot{I} = U - U_k \quad (\text{A.1b})$$

$$I_{NL} = aU + bU^3 \quad (\text{A.1c})$$

$$RI_k = (U_\tau - U) \quad (\text{A.1d})$$

$$U_k = k(U - U_\tau) \quad (\text{A.1e})$$

abgeleitet werden. Die Farben der Kontrollterme sind entsprechend den Farben in Abbildung A.1 gewählt. Nach entsprechender Normierung ergibt sich daraus:

$$\dot{x} = -y \quad (\text{A.2a})$$

$$\dot{y} = x + (2\epsilon + x^2)y - K_{yx}(x - x_\tau) - K_{yy}(y - y_\tau) \quad (\text{A.2b})$$

In dieser normierten Form entspricht x der Spannung U . Die Kontrollkräfte koppeln nur an die y -Komponente an.

Der Nachteil dieses Schwingkreises ist, dass der Strom nicht ohne grundlegende Veränderung der Systemdynamik gemessen werden kann. Die einzige zugängliche Messgröße ist die Spannung U . Eine Ankopplung mittels einer Drehmatrix ist somit ausgeschlossen. Die einzige Möglichkeit dies zu umgehen, besteht in einer Phasenraum-Rekonstruktion. Experimentell würde sich das Verfahren des *delay embedding* empfehlen, da es ohne Rechenaufwand auskommt und mit einer der vorhandenen Zeitverzögerungsschaltungen leicht zu realisieren wäre.

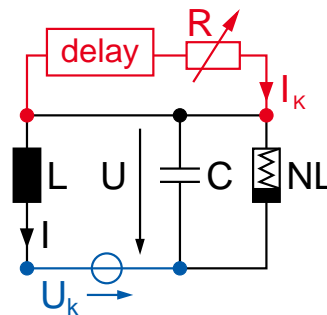


Abbildung A.1.: Prinzipeller Aufbau eines van-der-Pol-Oszillators.

A.2 Schaltpläne

Dieser Abschnitt enthält folgende Schaltpläne:

- Stuart-Landau-Oszillators (Seite 65)
- Zeitverzögerungs-Schaltung für einen Kanal (Seite 66)
- Steuerungsschaltung (Seite 67)

Der Schaltplan des Stuart-Landau-Oszillators bildet die Differenzialgleichung

$$\begin{pmatrix} \dot{U}_x \\ \dot{U}_y \end{pmatrix} = \omega \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_x \\ U_y \end{pmatrix} + \alpha (U_x^2 + U_y^2) \begin{pmatrix} 1 & -\gamma \\ \gamma & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_x \\ U_y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} U_{Kx} \\ U_{Ky} \end{pmatrix} \quad (\text{A.3})$$

ab (vgl. Gl. (4.1)), wobei U_{Kx} und U_{Ky} den angekoppelten Kontrollkräften entspricht. Aus den Widerstandswerten der Schaltung lassen sich die Parameter λ und γ der Hopf-Normalform berechnen. Sie ergeben sich zu:

$$\lambda = - \left(\frac{R_{13}}{R_{12}} + \frac{\frac{R_{13}}{R_{12}} + \left(1 + \frac{R_{13}}{R_{14}} + \frac{R_{13}}{R_{15}}\right)}{\frac{R_{17}}{R_{16}} \left(1 + \frac{R_{10}}{R_{11}}\right)} \right) \approx -1.02 \quad (\text{A.4a})$$

$$\gamma = \frac{R_7}{R_8} \approx 10.0 \quad (\text{A.4b})$$

Um die Amplitude und die Frequenz des instabilen Orbits im Experiment abzuschätzen, wird der Parameter der Zeitnormierung ω und der Amplitudennormierung α benötigt:

$$\omega = \frac{1}{R_{16}C} \left(\frac{\left(1 + \frac{R_{10}}{R_{11}}\right)}{\frac{R_{13}}{R_{12}} + \left(1 + \frac{R_{13}}{R_{14}} + \frac{R_{13}}{R_{15}}\right)} \right) \approx 1.03 \cdot 10^3 \text{ s}^{-1} \quad (\text{A.5a})$$

$$\alpha = \frac{1}{R_{16}C} \left(\frac{\frac{R_{10}}{R_{11}} \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \left(1 + \frac{R_4}{R_3}\right) \left(1 + \frac{R_5}{R_6}\right)}{\left(1 + \frac{R_7}{R_8} + \frac{R_7}{R_9}\right) U_{ref}^2} \right) \approx 123 \text{ s}^{-1} \text{V}^{-2} \quad (\text{A.5b})$$

Dabei ist U_{ref} die Referenzspannung des Multiplikators **AD633**. Sie beträgt $U_{ref} = 10 \text{ V}$. Mit den Normierungsparametern ergeben sich die im Experiment erwarteten Werte der Amplitude R_p und der Frequenz ν zu:

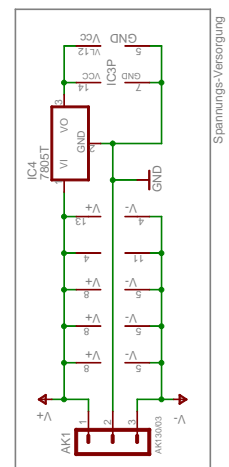
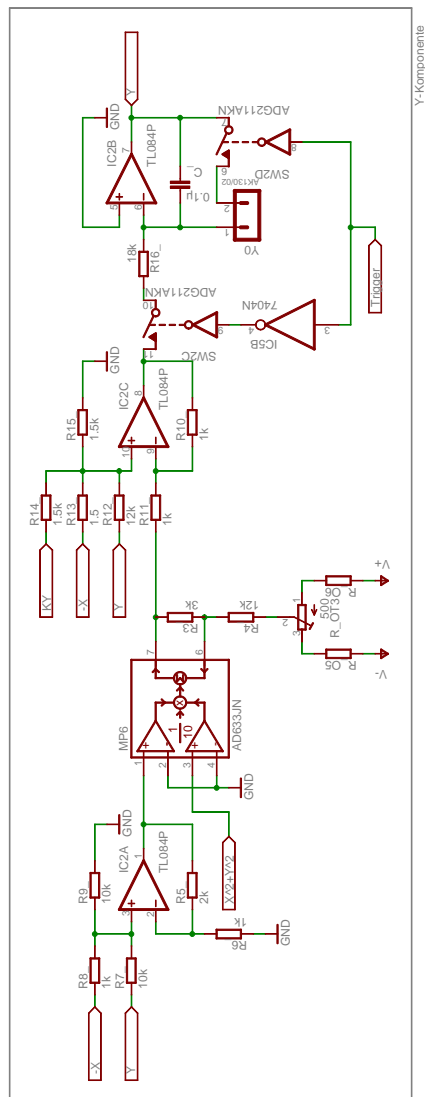
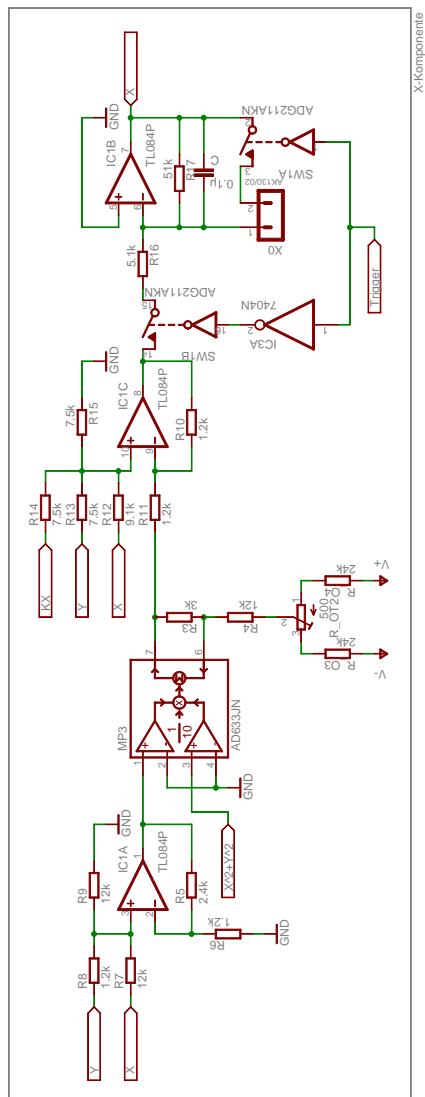
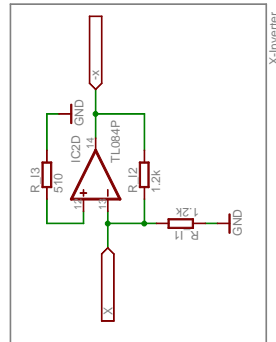
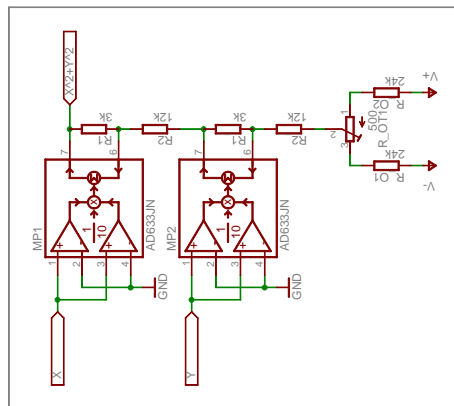
$$R_p = \sqrt{\frac{-\lambda\omega}{\alpha}} \approx 2,9 \text{ V} \quad (\text{A.6a})$$

$$\nu = (1 - \gamma\lambda) \frac{\omega}{2\pi} \approx 1,82 \text{ kHz} \quad (\text{A.6b})$$

Die im Experiment gemessenen Werte weichen deutlich davon ab:

$$R_{exp} \approx 1,2 \text{ V} \quad (\text{A.7a})$$

$$\nu_{exp} \approx 970 \text{ Hz} \quad (\text{A.7b})$$



Date: 19.02.2009 21:19:23



B Theorie

B.1 Die transkritische Bifurkation als Kollision zweier Sattel-Knoten-Bifurkationen

Die transkritische Bifurkation kann ebenso wie die Heugabel-Bifurkation als Grenzfall einer Kodimension-zwei-Bifurkation aufgefasst werden. An beiden Bifurkationen ist die Sattel-Knoten-Bifurkation beteiligt. Für die transkritische Bifurkation soll das hier kurz dargestellt werden. Für die Periodenverdopplungs-Bifurkation wird auf Kapitel 7.1 aus [Guckenheimer u. Holmes, 1983] verwiesen.

Die Differenzialgleichung, die herangezogen wird, hat große Ähnlichkeit mit der Normalform der transkritischen Bifurkation. Es kommt nur additiv ein Bifurkationsparameter μ_2 hinzu:

$$\dot{x} = f(x, \mu_1, \mu_2) = -\mu_2 + 2\mu_1 x - x^2 \quad (\text{B.1})$$

Damit eine Sattel-Knoten-Bifurkation auftritt, müssen die Transversalitätsbedingungen an den Bifurkationspunkten $(\tilde{x}, \tilde{\mu}_1, \tilde{\mu}_2)$ erfüllt sein (Kapitel 3.4 [Guckenheimer u. Holmes, 1983]). Sie lautet:

$$f(\tilde{x}, \tilde{\mu}_1, \tilde{\mu}_2) = 0 \quad (\text{B.2a})$$

$$\frac{\partial f(\tilde{x}, \tilde{\mu}_1, \tilde{\mu}_2)}{\partial x} = 0 \quad (\text{B.2b})$$

Aus diesen beiden Bedingungen lässt sich die Lage der Bifurkationen in der μ_1 - μ_2 -Ebene bestimmen. Für die Bifurkationen ergibt sich daraus der Zusammenhang der Bifurkationsparameter:

$$\tilde{\mu}_2 = \tilde{\mu}_1^2 \quad (\text{B.3})$$

Für die eine Sattel-Knoten-Bifurkation gibt es zwei weitere Transversalitätsbedingungen, die dafür sorgen, dass keine Entartung vorliegt:

$$\frac{\partial f(\tilde{x}, \tilde{\mu}_1, \tilde{\mu}_2)}{\partial \mu_i} \neq 0 \quad (\text{B.4a})$$

$$\frac{\partial^2 f(\tilde{x}, \tilde{\mu}_1, \tilde{\mu}_2)}{\partial x^2} \neq 0 \quad (\text{B.4b})$$

Die zweite Zusatzbedingung ist immer erfüllt. Aus der ersten Zusatzbedingung (B.4a) ergeben sich mit der Differenzialgleichung (B.1) zwei Bedingungen, die beide gleichzeitig erfüllt sein müssen:

$$\frac{\partial f(\tilde{x}, \tilde{\mu}_1, \tilde{\mu}_2)}{\partial \mu_1} = 2\tilde{\mu}_1 \quad (\text{B.5a})$$

$$\frac{\partial f(\tilde{x}, \tilde{\mu}_1, \tilde{\mu}_2)}{\partial \mu_2} = -1 \quad (\text{B.5b})$$

Das ist für alle Werte der Bedingung (B.3) bis auf das Wertepaar $(\tilde{\mu}_1, \tilde{\mu}_2) = (0, 0)$, der Fall. Dieser Sonderfall wird im Anschluss behandelt. Aus den Vorzeichen kann noch die Aussage gewonnen werden, dass die zwei Lösungen der Differenzialgleichung (B.1) für

$$|\mu_1| > |\tilde{\mu}_1| \quad (\text{B.6a})$$

$$\mu_2 < \tilde{\mu}_2 = \mu_1^2 \quad (\text{B.6b})$$

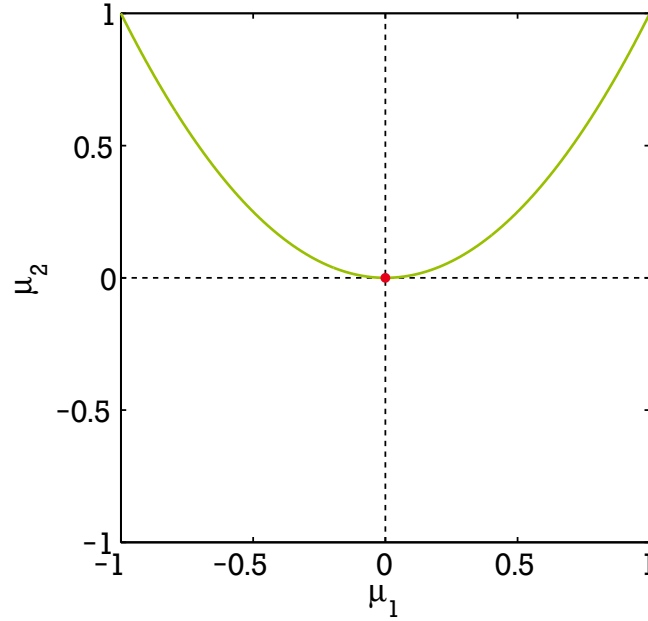


Abbildung B.1.: μ_1 - μ_2 -Ebene. Grüne Linien zeigen die Sattel-Knoten-Bifurkationen. Der rote Punkt ist die Kodimension-zwei-Bifurkation. Unterhalb der Parabel existieren zwei Fixpunkte, ein stabiler und ein instabiler. Oberhalb gibt es keine Fixpunktlösung der Gleichung (B.1). In Abbildung B.2 sind drei typische Bifurkationsdiagramme zu sehen, die Schnitte für feste $\mu_2 = \{-1/4; 0; +1/4\}$ durch diese Ebene veranschaulichen.

existieren. Andernfalls existiert keine Lösung (vgl. Abb. B.1). Es bleibt jetzt noch zu klären, was für $(\tilde{\mu}_1, \tilde{\mu}_2) = (0, 0)$ passiert.

An dieser Stelle liegt eine Kodimension-zwei-Bifurkation vor. Es können zwei Grenzfälle betrachtet werden. Der eine tritt ein, wenn μ_1 auf dem Wert $\mu_1 = 0$ festgehalten wird. Die Bedingung (B.5b) ist dann obsolet, und die Gleichung (B.1) reduziert sich auf die Normalform der Sattel-Knoten-Bifurkation. Der zweite Grenzfall zeigt die transkritische Bifurkation. Bei der transkritischen Bifurkation muss die triviale Lösung immer eine Lösung der Differenzialgleichung sein:

$$f(0, \mu_1, \mu_2) = 0 \quad (\text{B.7})$$

Außerdem wird die Bedingung (B.4a) der Sattel-Knoten-Bifurkation durch die Transversalitätsbedingung

$$\frac{\partial^2 f(\tilde{x}, \tilde{\mu}_1, \tilde{\mu}_2)}{\partial x \partial \mu_i} \neq 0 \quad (\text{B.8})$$

ersetzt. Für Variation in μ_2 ist diese Bedingung nie erfüllt, für Variation in μ_1 immer. Daraus folgt, dass die transkritische Bifurkation nur auftritt, wenn der Punkt $(\tilde{\mu}_1, \tilde{\mu}_2) = (0, 0)$ entlang der μ_1 -Achse durchlaufen wird. Es handelt sich also bei ihr um eine Kodimension-eins-Bifurkation. Das Vorzeichen der Bedingung (B.8) liefert die Aussage, dass die triviale Lösung für negative μ_1 instabil und für positive μ_1 stabil ist (s. Abb. B.2).

Zusammenfassend lässt sich sagen: Für feste Werte von μ_2 treten drei verschiedene Szenarien auf. Sie sind in Abbildung B.2 dargestellt und beschrieben. Wird dagegen μ_1 festgehalten, treten bei Veränderung von μ_2 jeweils Sattel-Knoten-Bifurkationen auf. Werden beide Bifurkationsparameter variiert, sind Mischformen zu sehen. Die transkritische Bifurkation tritt nur für den Fall auf, dass $\mu_2 = 0$ gilt und μ_1 einen Vorzeichenwechsel hat.

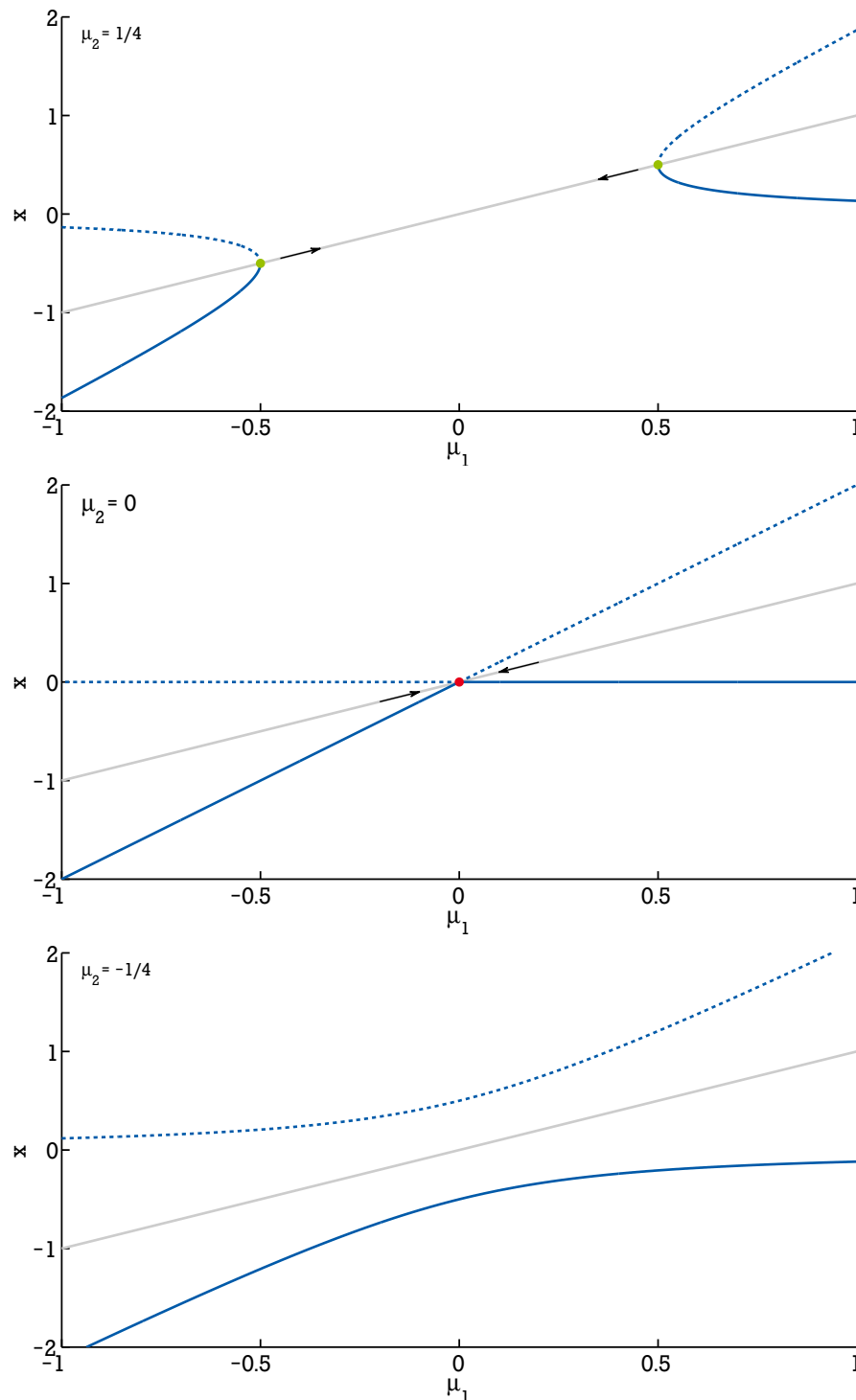


Abbildung B.2.: Bifurkationsdiagramme für feste μ_2 -Werte. Die Fixpunktlösungen sind als blaue Linien dargestellt. Sind die Linien gestrichelt, ist der Fixpunkt instabil, ist sie durchgezogen, ist er stabil. Die Bifurkationspunkte sind grün bzw. rot. Bei Veränderung von μ_2 wandern die Bifurkationspunkte entlang der grauen Linie. Es gibt drei typische Fälle: **Oben:** Für positive μ_2 -Werte treten zwei Sattel-Knoten-Bifurkationen (grüne Punkte) auf. Zwischen den Bifurkationspunkten gibt es keine Fixpunktlösungen. Für kleiner werdende μ_2 -Werte wandern die Bifurkationspunkte aufeinander zu. **Mitte:** Hier ist der Grenzfall $\mu_2 = 0$ gezeigt. Die beiden Sattel-Knoten-Bifurkationen aus dem oberen Teil kollidieren und es entsteht eine transkritische Bifurkation (roter Punkt). **Unten:** Für negative μ_2 -Werte treten keine Bifurkationen auf, und die Stabilität der Fixpunkte ändert sich nicht.

B.2 Allgemeine Behandlung der transkritischen Bifurkationslinie

Wie in Kapitel 2.2 dargestellt, tritt bei der Kontrolle des Pyragas-Orbits im Stuart-Landau-Oszillator eine transkritische Bifurkation auf. Diese transkritische Bifurkation wurde neben der analytischen Form des Stuart-Landau-Oszillators auch in Simulationen des van-der-Pol-Oszillators gesehen (Kapitel 3.3). In beiden Fällen war die Bifurkationslinie im Rahmen der numerischen Genauigkeit eine Gerade, und zwar unabhängig von der Ankopplung der Kontrollkräfte. Interessant ist, ob dies allgemeingültig ist oder nur eine zufällige Eigenschaft. Durch einfache Überlegungen analog zu Kapitel 1.1 soll hier gezeigt werden, dass es sich tatsächlich um Geraden handelt [Just, 2009].

Im Gegensatz zur linearen Stabilitätsanalyse in Kapitel 1.1 gibt es bei der Kontrolle torsionsfreier Orbits nicht nur eine Kontrollamplitude (K) sondern zwei (K_x und K_y). Dementsprechend hängt die Differenzialgleichung des kontrollierten Systems von zwei skalaren Kontrollkräften $F_x(t)$ und $F_y(t)$ ab:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), F_x(t), F_y(t)) \quad (\text{B.9})$$

Die Kontrollkräfte hängen hier von den inneren Freiheitsgraden durch zwei unterschiedliche Funktionale g_x und g_y ab. Die Form der Kontrollkräfte ist analog zu Gleichung (1.4):

$$F_x(t) = K_x \left(g_x[\mathbf{x}(t)] - g_x[\mathbf{x}(t - \tau)] \right) \quad (\text{B.10a})$$

$$F_y(t) = K_y \left(g_y[\mathbf{x}(t)] - g_y[\mathbf{x}(t - \tau)] \right) \quad (\text{B.10b})$$

Eine Linearisierung um den periodischen Orbit $\xi(t) = \xi(t + T)$ liefert:

$$\begin{aligned} \delta \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{D}_1 \mathbf{f}(\xi(t), 0) \cdot \delta \mathbf{x}(t) \\ &+ \left(K_x \cdot \mathbf{A}_x(t) + K_y \cdot \mathbf{A}_y(t) \right) \cdot \left(\delta \mathbf{x}(t) - \delta \mathbf{x}(t - \tau) \right) \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

Dabei steckt die Information über die spezielle Ankopplung an das System in den Matrizen $\mathbf{A}_x(t)$ und $\mathbf{A}_y(t)$, die als Abkürzungen für

$$\mathbf{A}_x(t) = \mathbf{d}_2 \mathbf{f}(\xi(t), 0, 0) \cdot \mathbf{D}g_x[\xi(t)] \quad (\text{B.12a})$$

$$\mathbf{A}_y(t) = \mathbf{d}_3 \mathbf{f}(\xi(t), 0, 0) \cdot \mathbf{D}g_y[\xi(t)] \quad (\text{B.12b})$$

stehen. Wie im Kapitel 3.1 ausgeführt, lässt sich die linearisierte Differenzialgleichung mittels einer Evolutionsmatrix $\mathbf{U}(t)$ ausdrücken. Es ergibt sich dabei eine Differenzialgleichung für die Evolutionsmatrix, die nicht mehr von der zeitverzögerten Größe $\delta \mathbf{x}(t - \tau)$ abhängt:

$$\dot{\mathbf{U}}(t) = \left[\mathbf{D}_1 \mathbf{f}(\xi(t), 0) + \left(K_x \cdot \mathbf{A}_x(t) + K_y \cdot \mathbf{A}_y(t) \right) \cdot \left(1 - \mu^{-1} \right) \right] \mathbf{U}(t) \quad (\text{B.13})$$

Dabei ist μ der Floquet-Multiplikator des periodischen Orbits unter Kontrolle. Das charakteristische Polynom ist dann, wie in Kapitel 3.1 gezeigt, durch

$$P(\mu^{-1}) = \det \left(\mathbf{1} - \mu^{-1} \mathbf{U}(\tau) \right) \stackrel{!}{=} 0 \quad (\text{B.14})$$

gegeben. Wegen der Gleichung (B.13) ist die Evolutionsmatrix $\mathbf{U}(t)$ eine analytische Funktion, die sowohl von $K_x(1 - \mu^{-1})$ als auch von $K_y(1 - \mu^{-1})$ abhängt. Das charakteristische Polynom kann deshalb in die Form

$$P(\mu^{-1}) = F \left(\mu^{-1}, K_x(1 - \mu^{-1}), K_y(1 - \mu^{-1}) \right) \stackrel{!}{=} 0 \quad (\text{B.15})$$

gebracht werden, wobei die Funktion F ebenfalls analytisch in ihren Argumenten ist. Da die Linearisierung (B.11) eine Goldstone-Mode mitbringt, ist $\mu = 1$ eine Lösung des charakteristischen Polynoms¹. Das charakteristische Polynom kann also um die Goldstone-Mode entwickelt werden. Eine Entwicklung bis zur ersten Ordnung ergibt:

$$P(\mu^{-1}) = c_0 (\mu^{-1} - 1) - c_x K_x (\mu^{-1} - 1) - c_y K_y (\mu^{-1} - 1) + \mathcal{O}((\mu^{-1} - 1)^2) \stackrel{!}{=} 0 \quad (\text{B.16})$$

Die Entwicklungskoeffizienten c_0 , c_x und c_y sind Konstanten. Die transkritische Bifurkation tritt auf, wenn das charakteristische Polynom neben der Goldstone-Mode eine weitere Nullstelle besitzt. Aus der Entwicklung ergibt sich die Bedingung für die transkritische Bifurkation zu:

$$c_0 - c_x K_x - c_y K_y = 0 \quad (\text{B.17})$$

Durch Normierung der Kontrollamplituden kann diese Bedingung in die bekannte Form des Stuart-Landau-Oszillators überführt werden:

$$\kappa_x = 1 - \gamma \kappa_y \quad (\text{B.18})$$

Bisher ist noch nicht analytisch geklärt worden, inwieweit γ der nichtlinearen Frequenzverstimmung zugeordnet werden kann. Erschwerend kommt hinzu, dass sich die nichtlineare Frequenzverstimmung außer beim Stuart-Landau-Oszillator nicht eindeutig definieren lässt².

Bei der Auswertung der Simulationen und der Experimente wurde die Normierung der Kontrollamplituden durchgeführt und γ der nichtlinearen Frequenzverstimmung zugeordnet. In beiden Fällen scheint dieser heuristische Ansatz zu vernünftigen Ergebnissen zu führen.

¹ Die Goldstone-Mode ist zunächst nur Lösung des unkontrollierten Systems. Wie jedoch an Gleichung (B.13) zu sehen ist, wird sie nicht von der Kontrolle beeinflusst.

² Aktuell gibt es Bemühungen in dieser Richtung.

$$\begin{aligned}
 \kappa_x &= \left(-\sin \phi_h (\cos \phi_i - \sin \phi_i \gamma - \cos (2\phi_i) + \gamma \sin (2\phi_i)) \kappa_y^2 - 1/2 \left(4 \cos \phi_h \phi_h \sin \phi_i + 2 \gamma \tau \lambda \cos \phi_i \sin \phi_h + 6 (\cos \phi_i)^2 \gamma \phi_h \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - 6 (\cos \phi_i)^3 \gamma \phi_h + 6 \cos \phi_i \gamma \phi_h + 2 \lambda \tau \sin \phi_i \sin \phi_h + 6 \phi_h \cos \phi_i \sin \phi_i - 6 (\cos \phi_i)^2 \phi_h \sin \phi_i - 2 \phi_h \sin \phi_i - 6 \gamma \phi_h \right) \kappa_y \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\phi_h}{2(1 - \cos \phi_h)} \left((-2 \cos \phi_h + 2) \lambda (\cos \phi_h - (\cos \phi_i)^2 + \cos \phi_i + \sin \phi_i \gamma \cos \phi_i - \sin \phi_i \gamma) \tau \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \phi_h \sin \phi_h (\sin \phi_i \gamma \cos \phi_i - \sin \phi_i \gamma - (\cos \phi_i)^2 + \cos \phi_i - 1 + \cos \phi_h) \right) \right) \\
 &\quad / \left(\sin \phi_h (-\gamma - \cos \phi_i \gamma + 2 \sin \phi_i \cos \phi_i - \sin \phi_i + 2 (\cos \phi_i)^2 \gamma) \kappa_y + (\cos \phi_i - \sin \phi_i \gamma) \sin \phi_h \lambda \tau \right. \\
 &\quad \left. - \phi_h (\cos \phi_h + 2 \cos \phi_i \cos \phi_h + 4 (\cos \phi_i)^2 + 3 (\cos \phi_i)^2 \gamma \sin \phi_i - 3 (\cos \phi_i)^3 - 4 \sin \phi_i \gamma \cos \phi_i + \sin \phi_i \gamma - 2 \cos \phi_i) \right) \\
 \kappa_y &= \frac{P \pm \sqrt{P^2 - 4DQ}}{2D} \\
 P &= \sin \phi_h ((\lambda + \gamma) \cos \phi_i + (1 - \lambda \gamma) (\sin \phi_i - \gamma \cos (2\phi_i) - \sin (2\phi_i)) - (1 + \gamma^2) \lambda) \tau \\
 &\quad + (2 (\sin \phi_i)^2 (\cos \phi_i - 1) g^2 + \sin \phi_i (\cos \phi_h + 4 - 6 \cos \phi_i + \cos (2\phi_i)) g + (\cos \phi_i - 1) (3 \cos \phi_h - (2 \cos \phi_i - 1)^2)) \phi_h \\
 &\quad + \sin \phi_h ((\cos (2\phi_i) - \cos \phi_i) \gamma - \sin \phi_i + \sin (2\phi_i)) \phi_i \\
 Q &= \frac{\sin \phi_h ((\sin \phi_i \cos \phi_i - \sin \phi_i) \gamma - (\cos \phi_i - 1)^2 - \cos \phi_i + \cos \phi_h) \phi_h^2 (\cos \phi_i \gamma - \gamma + \sin \phi_i)}{2 \cos \phi_h - 2} \\
 &\quad - \lambda \phi_h \tau (\cos \phi_h - (\cos \phi_i)^2 + \cos \phi_i + \sin \phi_i \gamma \cos \phi_i - \sin \phi_i \gamma) (\cos \phi_i \gamma - \gamma + \sin \phi_i) (\phi_i - \tau + \gamma \tau \lambda) \\
 &\quad \cdot \left(2 \phi_h \cos \phi_i \cos \phi_h - \cos \phi_h \phi_h + \sin \phi_i \gamma \phi_h - 4 \sin \phi_i \gamma \cos \phi_i \phi_h + 3 (\cos \phi_i)^2 \gamma \sin \phi_i \phi_h - \lambda \tau \sin \phi_i \sin \phi_h \gamma - 2 \phi_h \cos \phi_i \right. \\
 &\quad \left. + \lambda \sin \phi_h \tau \cos \phi_i + 4 (\cos \phi_i)^2 \phi_h - 3 (\cos \phi_i)^3 \phi_h \right) \\
 D &= 2 \sin \phi_h (1 + \gamma^2) (\cos \phi_i - 1) \sin \phi_i
 \end{aligned}$$

Literaturverzeichnis

- [Bleich u. Socolar 1996] BLEICH, M. E. ; SOCOLAR, J. E. S.: Stability of periodic orbits controlled by time-delay feedback. In: *Physics Letters A* 210 (1996), Nr. 1-2, S. 87. [http://dx.doi.org/10.1016/0375-9601\(95\)00827-6](http://dx.doi.org/10.1016/0375-9601(95)00827-6). – ISSN 0375-9601
- [Engelborghs u. a. 2002] ENGELBORGHs, K. ; LUZYANINA, T. ; ROOSE, D.: Numerical bifurcation analysis of delay differential equations using DDE-BIFTOOL. In: *ACM Trans. Math. Softw.* 28 (2002), Nr. 1, S. 1. <http://dx.doi.org/10.1145/513001.513002>. – ISSN 0098-3500
- [Erzgräber u. Just 2009] ERZGRÄBER, H. ; JUST, W.: Global view on a nonlinear oscillator subject to time-delayed feedback control. In: *Physica D: Nonlinear Phenomena* 238 (2009), Nr. 16, S. 1680. <http://dx.doi.org/10.1016/j.physd.2009.05.007>. – ISSN 0167-2789
- [Fiedler u. a. 2007] FIEDLER, B. ; FLUNKERT, V. ; GEORGI, M. ; HÖVEL, P. ; SCHÖLL, E.: Refuting the Odd-Number Limitation of Time-Delayed Feedback Control. In: *Physical Review Letters* 98 (2007), Nr. 11, S. 114101. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.98.114101>
- [Guckenheimer u. Holmes 1983] GUCKENHEIMER, J. ; HOLMES, P.: *Applied Mathematical Sciences*. Bd. 42: *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*. (Corrected seventh printing, 2002). New York, Berlin, Heidelberg : Springer, 1983. – ISBN 0-387-90819-6
- [Just 2009] JUST, W.: *Transcritical bifurcation: a general condition*. Private Kommunikation, Dezember 2009
- [Just u. a. 1997] JUST, W. ; BERNARD, T. ; OSTHEIMER, M. ; REIBOLD, E. ; BENNER, H.: Mechanism of time-delayed feedback control. In: *Phys. Rev. Lett.* 78 (1997), Jan, Nr. 2, S. 203–206. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.78.203>
- [Just u. a. 2007] JUST, W. ; FIEDLER, B. ; GEORGI, M. ; FLUNKERT, V. ; HÖVEL, P. ; SCHÖLL, E.: Beyond the odd number limitation: A bifurcation analysis of time-delayed feedback control. In: *Physical Review E (Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics)* 76 (2007), Nr. 2, S. 026210. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevE.76.026210>
- [Just u. a. 2000] JUST, W. ; REIBOLD, E. ; KACPERSKI, K. ; FRONCZAK, P. ; HOLYST, J. A. ; BENNER, H.: Influence of stable Floquet exponents on time-delayed feedback control. In: *Phys. Rev. E* 61 (2000), May, Nr. 5, S. 5045. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevE.61.5045>
- [von Loewenich u. a. 2010] LOEWENICH, C. von ; BENNER, H. ; SCHÖLL, E.: *Controlling noise-induced oscillations by time-delayed feedback in the van der Pol circuit*. (to be published), 2010
- [Nakajima 1997] NAKAJIMA, H.: On analytical properties of delayed feedback control of chaos. In: *Physics Letters A* 232 (1997), Nr. 3-4, S. 207. [http://dx.doi.org/10.1016/S0375-9601\(97\)00362-9](http://dx.doi.org/10.1016/S0375-9601(97)00362-9). – ISSN 0375-9601
- [Ott u. a. 1990] OTT, E. ; GREBOGI, C. ; YORKE, Y.A.: Controlling Chaos. In: *Physical Review Letters* 64 (1990), Nr. 11, S. 1196. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.64.1196>
- [Pyragas 1992] PYRAGAS, K.: Continuous control of chaos by self-controlling feedback. In: *Physics Letters A* 170 (1992), Nr. 6, S. 421. [http://dx.doi.org/10.1016/0375-9601\(92\)90745-8](http://dx.doi.org/10.1016/0375-9601(92)90745-8). – ISSN 0375-9601

-
- [Pyragas 2001] PYRAGAS, K.: Control of Chaos via an Unstable Delayed Feedback Controller. In: *Phys. Rev. Lett.* 86 (2001), Mar, Nr. 11, S. 2265–2268. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.86.2265>
- [Schöll u. Schuster 2007] SCHÖLL, E. (Hrsg.) ; SCHUSTER, H. G. (Hrsg.): *Handbook of Chaos Control*. Berlin : Wiley-VCH, 2007. – ISBN 978–3–527–40605–0. – Second completely revised and enlarged edition
- [Socolar u. a. 1994] SOCOLAR, Joshua E. S. ; SUKOW, David W. ; GAUTHIER, Daniel J.: Stabilizing unstable periodic orbits in fast dynamical systems. In: *Physical Review E* 50 (1994), Nr. 4, S. 3245. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevE.50.3245>

Lebenslauf

Angaben zur Person

Geburtsdatum	Clemens Johannes von Loewenich
Geburtsort	19.09.1978
Familienstand	Frankfurt am Main
	verheiratet, zwei Kinder

Gymnasialzeit

09.1988 – 08.1998	Heinrich-von-Gagern-Gymnasium, Frankfurt a. M.
06.1998	Humanistisches Gymnasium mit neusprachlichem Zweig
	Abitur, Leistungskurse: Physik, Mathematik

Wehrdienst

09.1998 – 06.1999	Panzerpionier
	Lahnstein / Rheinland-Pfalz

Studium

10.1999 – 12.2004	Technische Universität Darmstadt
	Diplom-Studium Physik
09.2001	Vordiplom, Nebenfach: Elektrotechnik
12.2004	Diplom, Diplomarbeit in der AG Prof. Benner: <i>„Experimentelle Untersuchung globaler Eigenschaften der zeitverzögerten Rückkopplungskontrolle“</i>

wiss. Mitarbeiter

02.2005 – 02.2010	Technische Universität Darmstadt
	Fachbereich Physik
	Institut für Festkörperphysik
	AG Prof. Benner



Danksagung

Mein herzlicher Dank gilt Herrn Prof. Dr. Hartmut Benner, der mir ermöglichte in seiner Arbeitsgruppe dieses interessante Forschungsgebiet zu bearbeiten. Ganz besonders gefreut habe ich mich über seine fachlichen Ratschläge und seine Ruhe und Geduld, die er mir gegenüber gezeigt hat.

Prof. Dr. Wolfram Just danke ich für seine Denkanstöße, die mir immer wieder Klarheit und Verständnis gegeben haben. Besonders seine schnellen Antworten habe ich sehr geschätzt.

Herzlich danken möchte ich meinem Kollegen und guten Freund Johannes Werner, mit dem ich die vielen Jahre im gleichen Büro gesessen habe. Ich danke ihm dafür, dass er mit mir über fachliche Themen diskutierte und immer ein offenes Ohr für meine Fragen hatte.

Der gesamten Arbeitsgruppe Benner danke ich für die angenehme Arbeitsatmosphäre aufgelockert durch gemeinsame Kaffeerunden, Grillabende, Wanderungen, und Fahrradtouren.

Mein Dank und meine Liebe gehen an meine Frau Carmen und meine beiden Kinder Beatrice und Raphael. Sie haben mich in jeder Lebenslage unterstützt und viel Kraft zum Schreiben gegeben.

Nicht zuletzt danke ich allen, die mir unermüdlich bei der Fehlersuche geholfen haben.



Erklärung zur Dissertation

Hiermit versichere ich die vorliegende Dissertation ohne Hilfe Dritter nur mit den angegebenen Quellen und Hilfsmitteln angefertigt zu haben. Alle Stellen, die aus Quellen entnommen wurden, sind als solche kenntlich gemacht. Diese Arbeit hat in gleicher oder ähnlicher Form noch keiner Prüfungsbehörde vorgelegen.

Darmstadt, den 15. Januar 2010

(C. v. Loewenich)